# 分形和分维引论

刘式达　刘式适　编著



# 分形和分维引论

刘式达
刘式适　编著



气象出版社

（京）新登字046号

## 内 容 简 介

分形或分数维是近十几年来发展起来的一门新学科。简单地说它就是没有特征尺度的自相似的结构。自然界中的许多现象，如地震、湍流、气候等都有这种特征。相对于有特征尺度的现象而言，无特征尺度现象可列在“复杂现象”之列。正因为如此，研究复杂现象的科学家们正在用分形概念打开他们的科学思维。

本书内容包括分形现象、分形意义、浑沌中的分形、多分维、时间序列分形等，还专门介绍了地球物理学中的分形及分形应用于湍流中的最新进展。作者力图从物理现象出发，运用物理概念、数学论证和模型相结合介绍分形问题，并配有例子和习题，尽量使自相似性、奇异性、间歇性等概念有明确的物理基础，使读者能具体地而不是抽象地掌握分形概念。

本书可供理工科特别是地球学科本科高年级学生、研究生及广大科技工作者参考。

分形和分维引论

刘式达　刘式适　编著

责任编辑　徐　昭

终　　审　刘宏勋

封面设计　牛涛　责任技编　席大光　责任校对　刘祥玉

*

气象出版社出版

（北京西郊白石桥路46号）

北京市昌平环球印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行　全国各地新华书店经销

*

开本：850×1168 1/32　印张：5.75　数字：148千字

1993年9月第一版　1993年9月第二次印刷

印数：1001—4500

ISBN 7-5029-1317-3/P·0576（课）

定价：7.00元

# 前　言

维数可以为分数这个事实，在10多年前恐怕不为人们所知，但是自从曼德布罗特(Mandelbrot)出版了“自然界的分维几何”(The Fractal Geometry of Nature, 1982)一书以后，分形(Fractal)已经形成一个新学科，它已经成为科学家们的热门话题。

分形或分数维，简单说就是没有特征尺度却有自相似的结构。自然界的许多现象如云彩、地震、湍流、气候等都具有这种特征，在这些现象中大大小小的时间(或空间)尺度都有，有的可以跨越几个量级。相对于有特征尺度的现象而言，无特征尺度的现象可以算在“复杂现象”之列。正因为如此，研究比较复杂现象的科学家正在用分形概念打开他们的思维。

单纯用几何角度就很难理解分数维这个概念，但是若从尺度变化后的不变量来理解，分形就必然和物理学中的对称性、重整化、标度律等概念联系起来。因此本书力图从物理现象出发介绍分形的有关问题，尽量使自相似性、奇异性、间歇性等概念有明确的物理基础。

本书既不纯粹从数学概念出发，又不纯粹从哲学高度来谈分形。而是既有物理概念，又有必要的数学论证或模型相配合，以致使读者能具体地而不是抽象地掌握分形这个概念。本书篇幅虽短，但涉及的问题包括分形现象、分形意义、浑沌中分形、多分维、时间序列分形。还有专门章节介绍地球物理学中的分形。同时还介绍了应用分形到湍流中去的最新进展。

本书在编写过程中广泛地参考了国内外有关分形的论著。内容较丰富且新颖并有习题。但由于时间较短，加之水平有限，难

免有疏漏或不当之处，希望读者给予指正。

本书得到国家科学基金会的大力支持。

刘式达、刘式适
于北京大学地球物理系
1992.7.27.

# 目　　录

# 第一章　自然界的分形现象

## §1　海岸线有多长

分形Fractal 这个词来自拉丁文fractus，意思含有断裂和碎片。它的创始人是曼德尔勃罗特(B.B.Mandelbrotc)。正如他常说的“云不是球体，山不是锥体，海岸线不是直线”。确实我们的大千世界是粗糙不堪而非完美圆润的，是凹凸不平而非光滑平坦的，是支离破碎而非完整无缺的。从本节开始叙述的现象都具有这个特点。

曼德尔勃罗特在著作中提出，英国的海岸线有多长?看起来，这个问题似乎应有某个数字作为答案，实际上正确的答案应该是看情况而定。因为海岸线有大大小小的各种弯曲，如果您用公里作测量单位，那么从几米到几十米的一些弯曲就会被忽略。如果您用米作测量单位，那么测得的总长度就会增加，但是厘米、毫米量级的小弯曲还是不能反映进去。

为什么海岸线的长度会看情况而定呢？这正是因为海岸线没有特征尺度，而是有大大小小的许许多多尺度。海岸线的长度在大小两个方向上受到自然限制，把海岸线两头用直线连起来，这是海岸线长度的一个上界。另一方面海岸线上沙石的最小尺度莫过于原子和分子的大小，使用更小的尺度是无意义的。在这两个自然限度之间海岸线的长度是变的，它不能成为海岸线的定量特征。

同时我们还应该看到，无论是 50 万分之一的中国地图 还 是500万分之一的地图，中国的海岸线都是非常相似的。无特征尺度却有自相似的结构是海岸线的双重特征，下面将看到，这个特征正是本书的标题——分形和分数维。

## §2 湍流有多少涡旋

湍流是流体中的比较复杂的现象。普遍看法是湍流是由大大小小的涡旋所组成。大气中最大的涡旋其尺度为几千公里，最小的涡旋有几个毫米。因此和海岸线相似，我们不能问湍流有多少涡旋组成的这个问题。

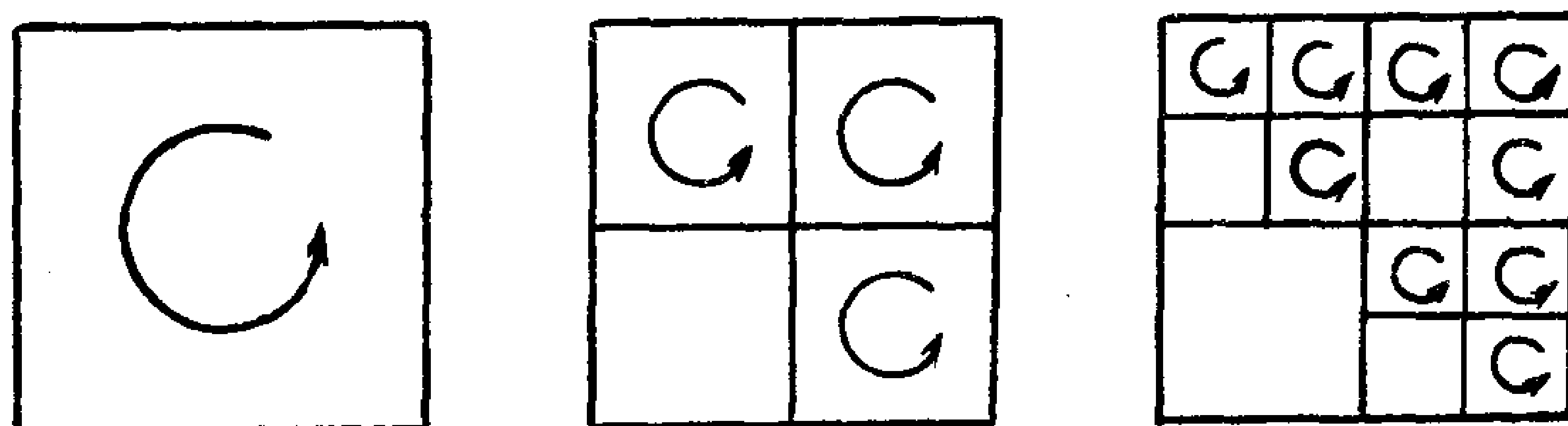


图1.1　湍流涡旋的自相似结构

假如我们用一个正方形代表一个大涡旋，那么图1.1中就含有三个小涡旋，而每个小涡旋又可以由三个更小的涡旋组成。实际上涡旋的个数随着尺度的减少而加多，它们被限制在最大和最小的两个自然限制中间。从图 1.1 看出，小涡旋放大就成为大涡旋的结构。1926年著名气象学家 Richardson 就猜测，在相当大的标度范围内，湍流由自相似的涡旋组成。1941年苏联著名科学家Kolmogoror给出了反映自相似结构的能谱和结构函数的分析表达式。后来Mandelbrot和 Frisch 把均匀各向同性的Kolmogoror湍流模型扩展到间歇性湍流模型。

虽然湍流现象很复杂，但若抓住自相似结构这个特点，同样我们可以建立起湍流规律以及找到描述湍流的定量特征。

## §3 Sierpinski海绵或垫片

图1.2是一种有多个三角形孔或正方形孔的海绵或垫片。

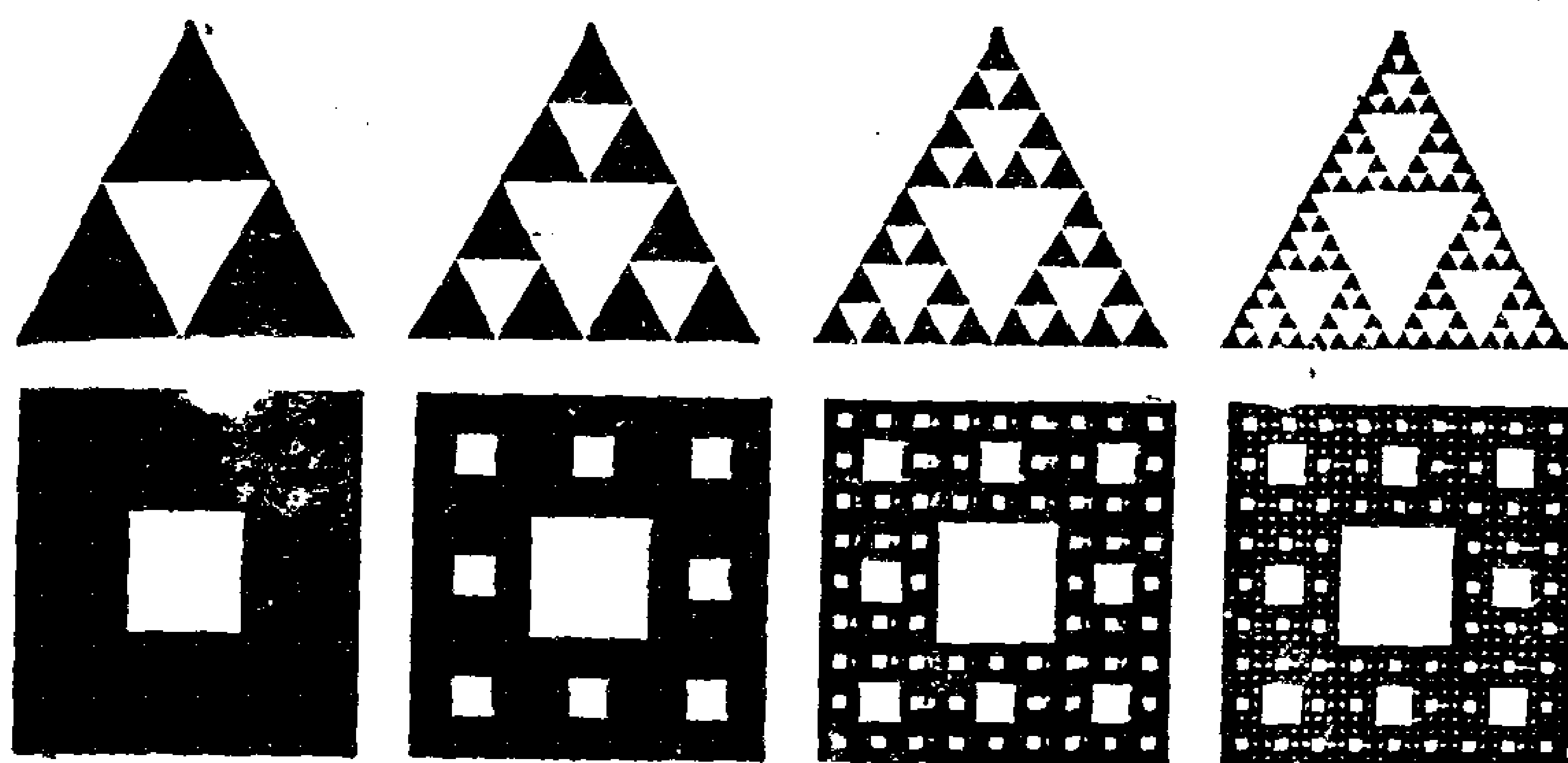


图 1.2

(a) Sierpinski海绵

(b) Sierpinski垫片

初看起来，它们应该有规律，但是当您“对准镜头”，逼近再逼近时，它们又显得杂乱无章，您要数一数孔的数目实在数不清。大大小小的孔都有，但是“自相似性”却把世上万物的“无规则性”以出人意料的规则方式反映出来。

## §4 Cantor集合

它是一种由点构成的集合，其构造步骤是：将长度为一的线段分成三等分，去掉中间一段，再将剩下的二小段也分成三等分，也都去掉其中段，如此无限进行下去，剩下的点集就是Cantor集合。见图1.3。

一般将区间[0,1]分成长度为$\frac{1}{m}$的$m$段（$m\geqslant2$）保留其中的$s$段，去掉其它的$m-s$段。如果每次应去掉的线段排列位置都是固定的，则是经典的Canter集合，图1.4是$m=4$，$s=2$以及$m=9$，$s=3$的两种Cantor集合。

有时Cantor集合分成的三段是不相等的，图1.5中一段长

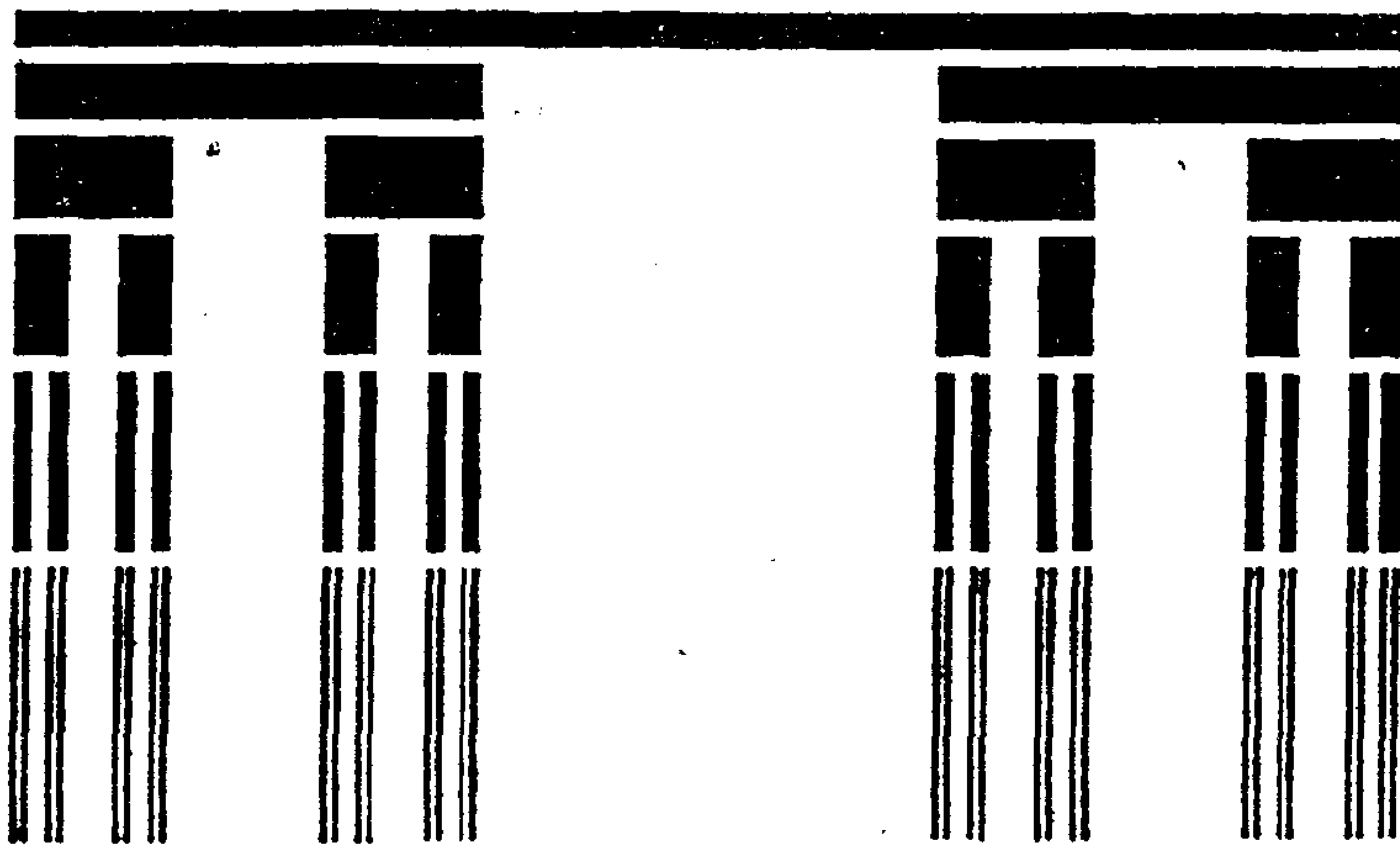


图1.3　传统的Cantor集合构造

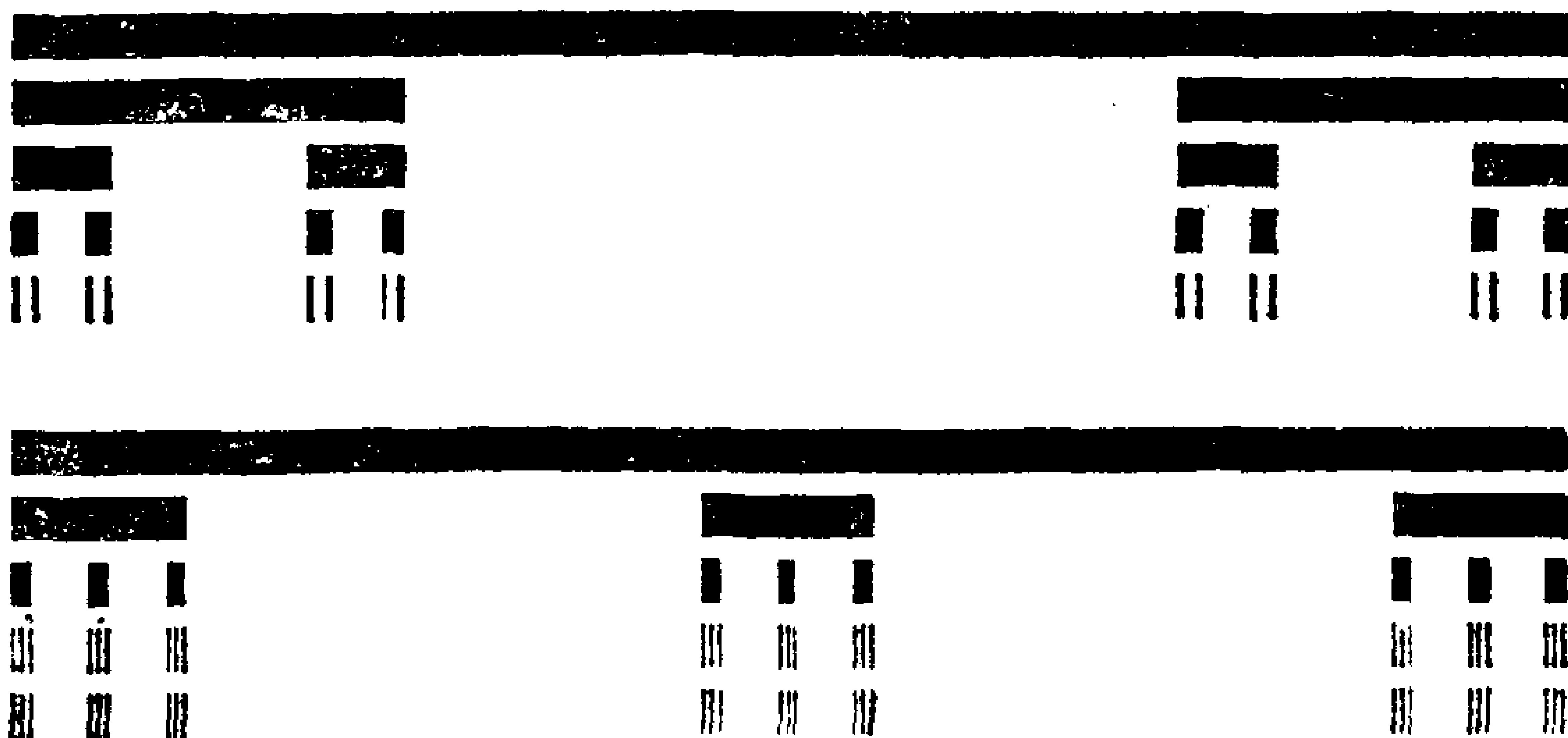


图1.4　两种Cantor集合



图1.5　不等比的Cantor集合

$l_1=\frac{1}{4}$，另一段长 $l_2=\frac{2}{5}$，去掉的一段为$\frac{7}{20}$。

有时去掉的线段是以某种概率取的，则它是不均匀分布的Cantor集合，见图1.6。

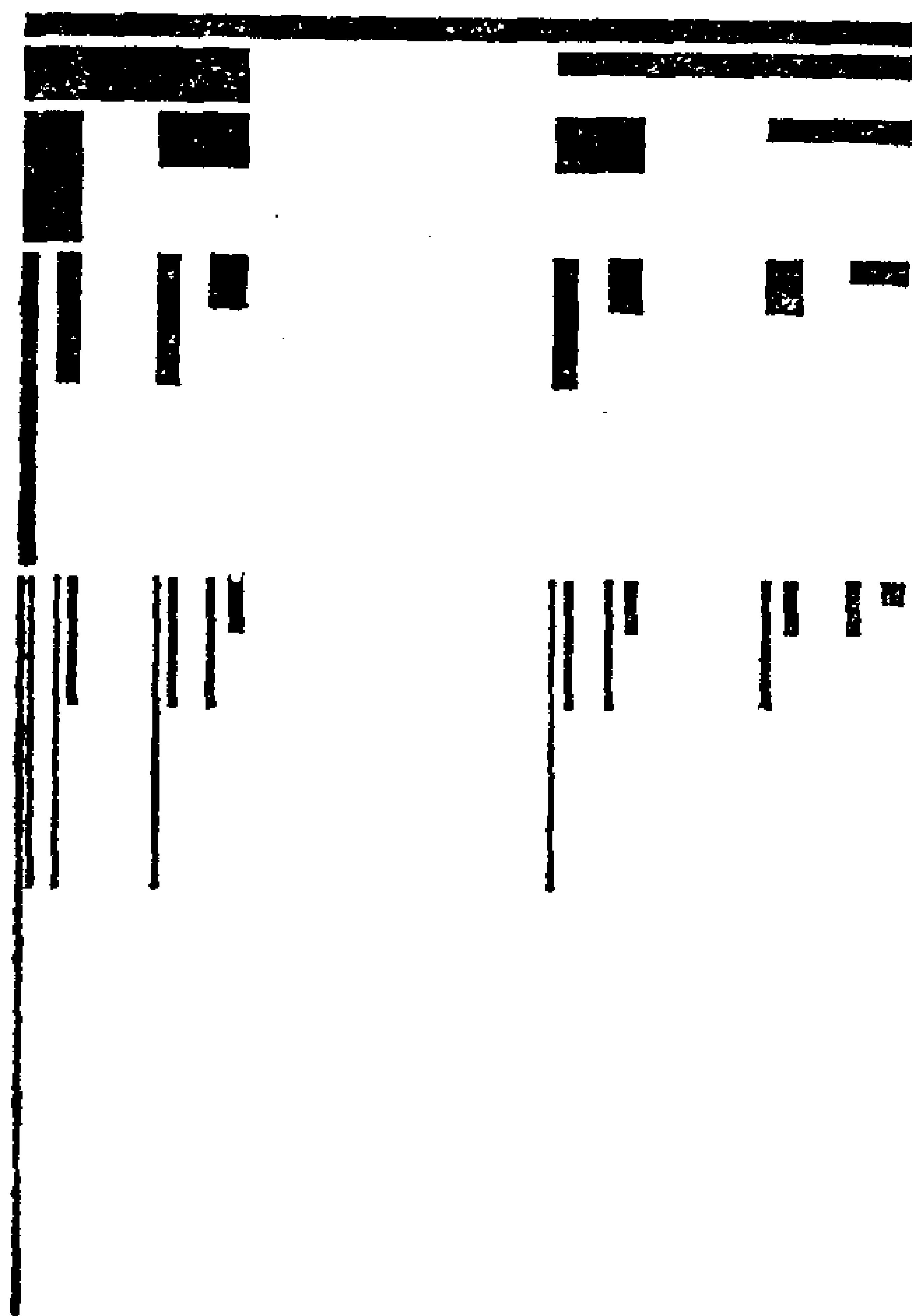


图1.6 不均匀分布的Cantor集合

Cantor 集合的自相似性是显然的。

## §5 Weierstrass 函数

这是一个处处连续而处处不可微的函数，它是 Weierstrass 在1872年发现的。现在常用的形式是

$$c(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(1-\cos b^{n}t)}{b^{(2-D)n}} \tag{1.1}$$

其中$D$就是Fractal。图1.7(a)，(b)，(c)是$b=1.5$时$D=1.2$，$D=1.5$和$D=1.8$的函数图像。

从（1.1）式显然有

$$c(bt)=b^{2-D}c(t) \tag{1.2}$$

（1.2）式说明函数$c(t)$和函数$c(bt)$是相似的，虽然两者的尺度不相同，一个是$t$，一个是$bt$。图1.8(a)是$b=1.5$，$D=1.8$的W氏函数，而图1.8(b)是图1.8(a)中$t=0.0$到0.2的一段，可以看出和图1.8(a)多么相似。将图1.8(a)的横坐标和纵坐标重新加以标度，分别为$b^4t$和$b^{4(2-D)}c(t)$，所得图像1.8(c)完全和图1.8(a)相同。

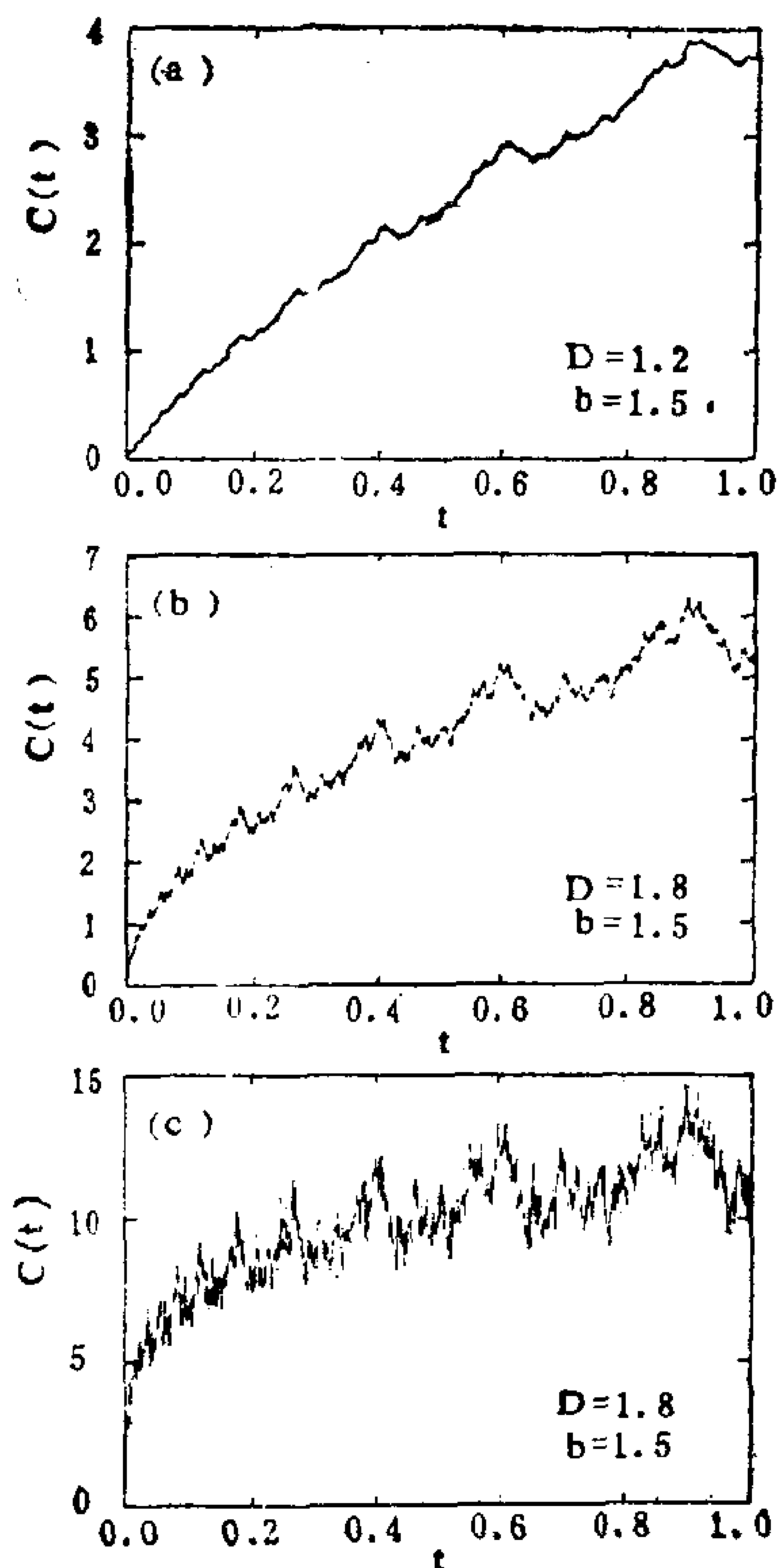



图1.7 Weierstrass分维函数，$b=1.5$
(a) $D=1.2$，(b) $D=1.5$，(c) $D=1.8$

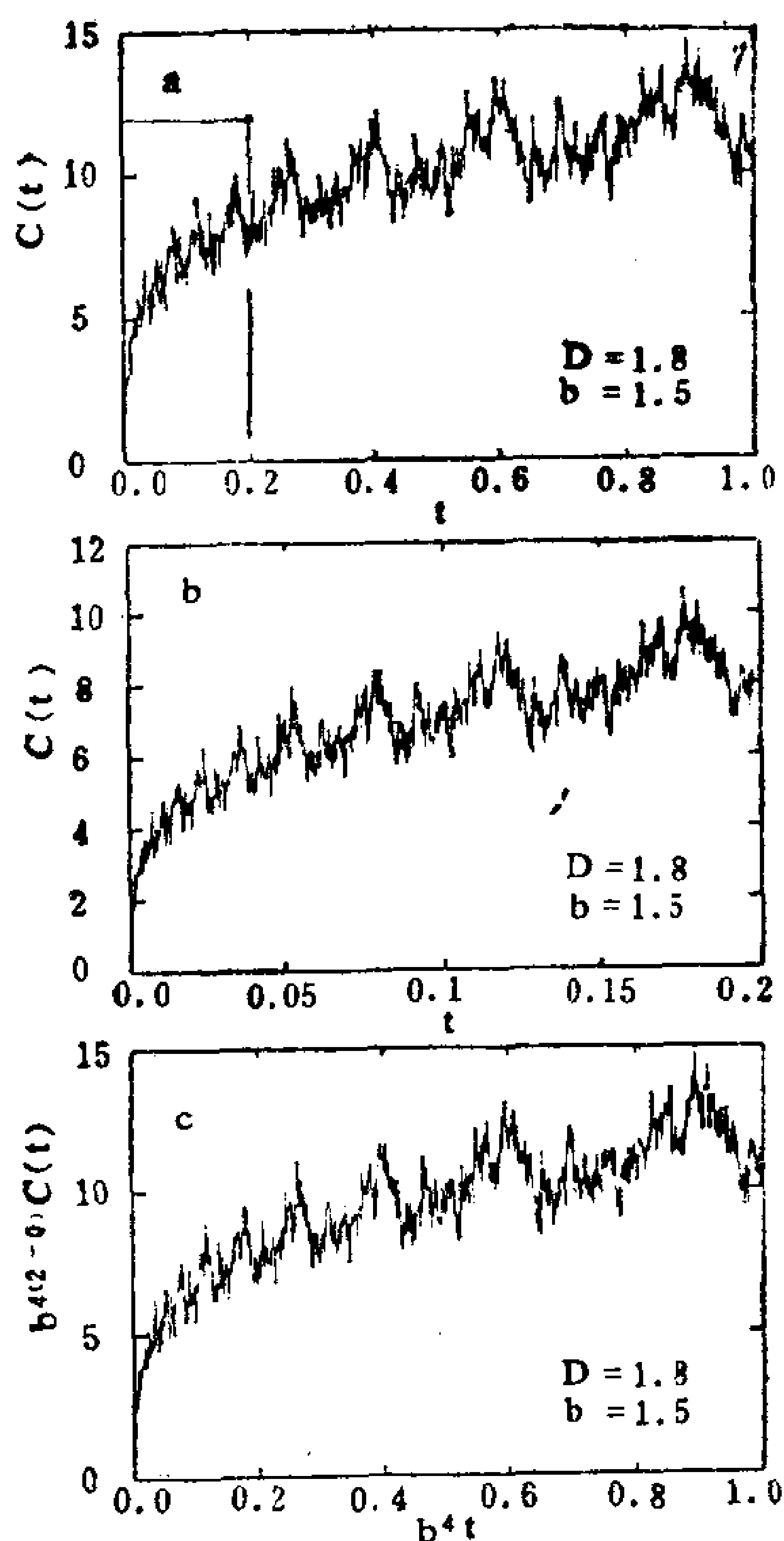



图1.8 Weierstrass函数，$b=1.5$，$D=1.8$
(a) $0\leqslant t\leqslant 1$ (b) $0\leqslant t\leqslant b^{-4}$
(c) 曲线$b$重新标度

## §6 雪花是如何形成的

雪花是自然界中生长出来的一种复杂形态。若将它的形成机理搞清楚，会对物理学中凝聚态的形成和对医学、生物学、流体力学等领域中的各种增长现象的研究，都有很大意义。

雪花是从云中落下的，通常首先有一个冻结核，周围都是过冷水汽。雪花周围水汽结冻所释放出的潜热得由水汽和冰核的交界面扩散而输送出去。由于交界面要输送大量潜热，交界面积就需足够大，因此交界面向外呈树枝状凸出（见图1.9）。交界面一旦凸出，水汽就喜欢在交界面凸出部分登陆冻结。为了模拟这种过程，我们采用细胞自动机模拟方法。



图1.9 雪花树枝状增长模型

将平面分成若干小的六边形网格，每个格点叫细胞。每个格点上假设只有两种可能的状态：冰或水汽。冰相用数字 1 表示，汽相用数字 0 表示。最初网格中心只有一个冰细胞冻结核，其它细胞均为水汽。以后生长的规定是：若该点周围的 6 个细胞的数值和为奇数（即二进制的 1 ），则该细胞就取冰相（数值为1），若为偶数（即二进制的 0 ），则该细胞就取汽相（数值为 0 ）。网格中的所有细胞都按这种规则演化。由于采用这个规则，演化的第一步就使冰核的六个角上长出六个冰晶，这是雪花的六角形状的开始，按此规则不断演化下去，一个含有大大小小六角形的雪花就生长出来，见图1.10。

这种模拟出来的六角形树枝状的雪花，其自相似性是显然

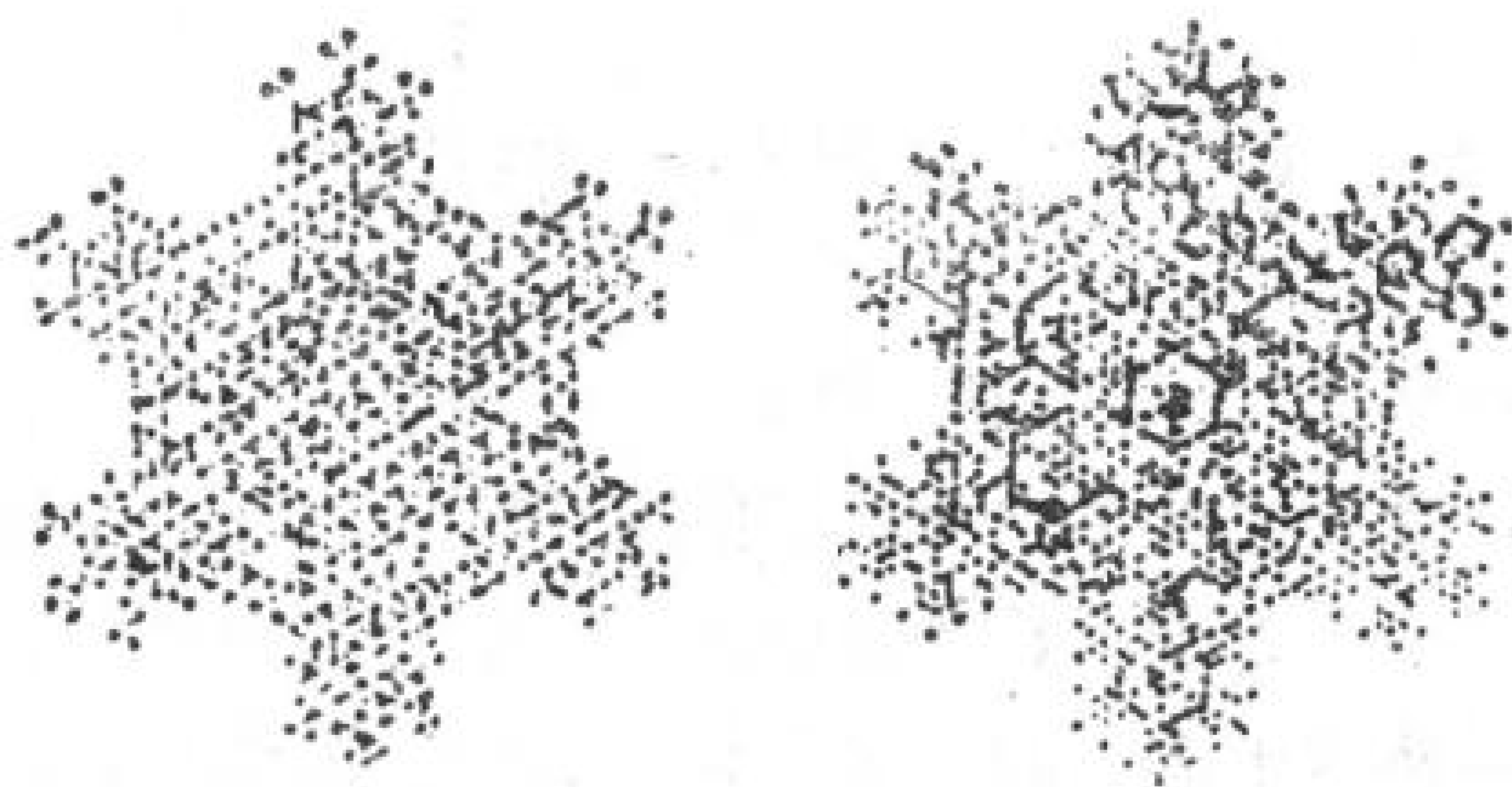


图1.10　细胞自动机模拟出的雪花

的。

## §7　粘性脂化（viscous fingering）和生长现象

粘性脂化是将低粘性流体（例如水）在压力下注入高粘性流

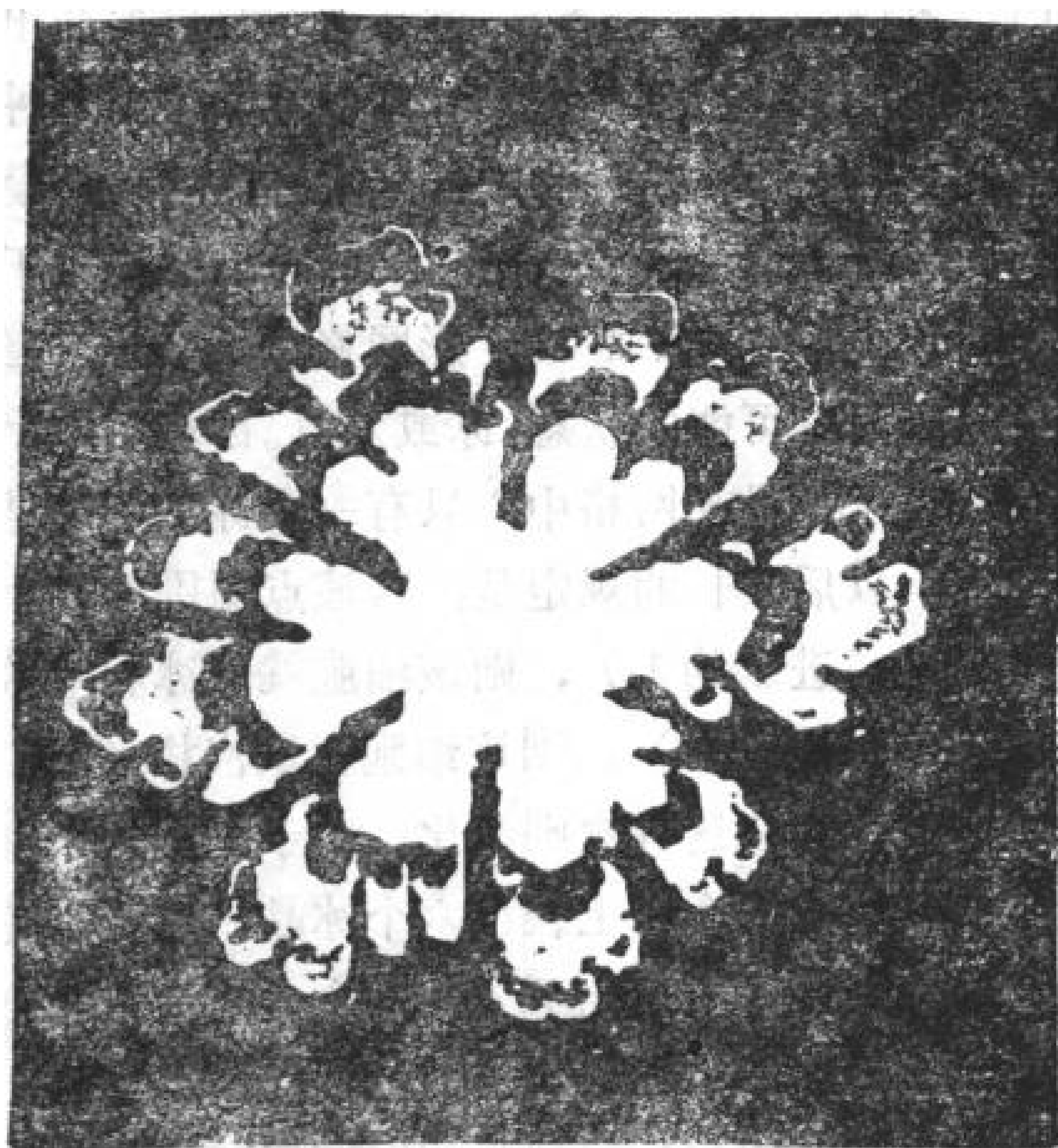


图1.11　粘性脂化形成的结构

体（例如油）中，由于两种流体非常大的粘性差别和交界面上的表面张力，最初形成的晶核(种子)由于不稳定而不断向外伸长，而使油象树枝状的扩散出来，见图 1.11。Nittmann 和 Stanley 考虑到水汽登陆位置非各向同性以及随机涨落，利用粘性脂化模拟出非各向同性的舌状雪花。粘性脂化对石油开采、流体动力学和多空介质物理学都是很重要的问题。

描述生长现象的一个模型叫有限扩散凝聚模型（diffusion-limites aggregation)，简称DLA。它是由Witter和Sander在1981年提出的。这种模型的初始状态是在 2 维点阵上有一个种子微粒，随后第二个微粒被放入点阵内作随机游动（扩散），直到它与种子微粒相碰并附着于种子微粒上与之聚合成集团。如果它游动到点阵边缘则将其去除并释放另一微粒。依此类推，最后形成树枝状的凝聚集团，见图1.12。

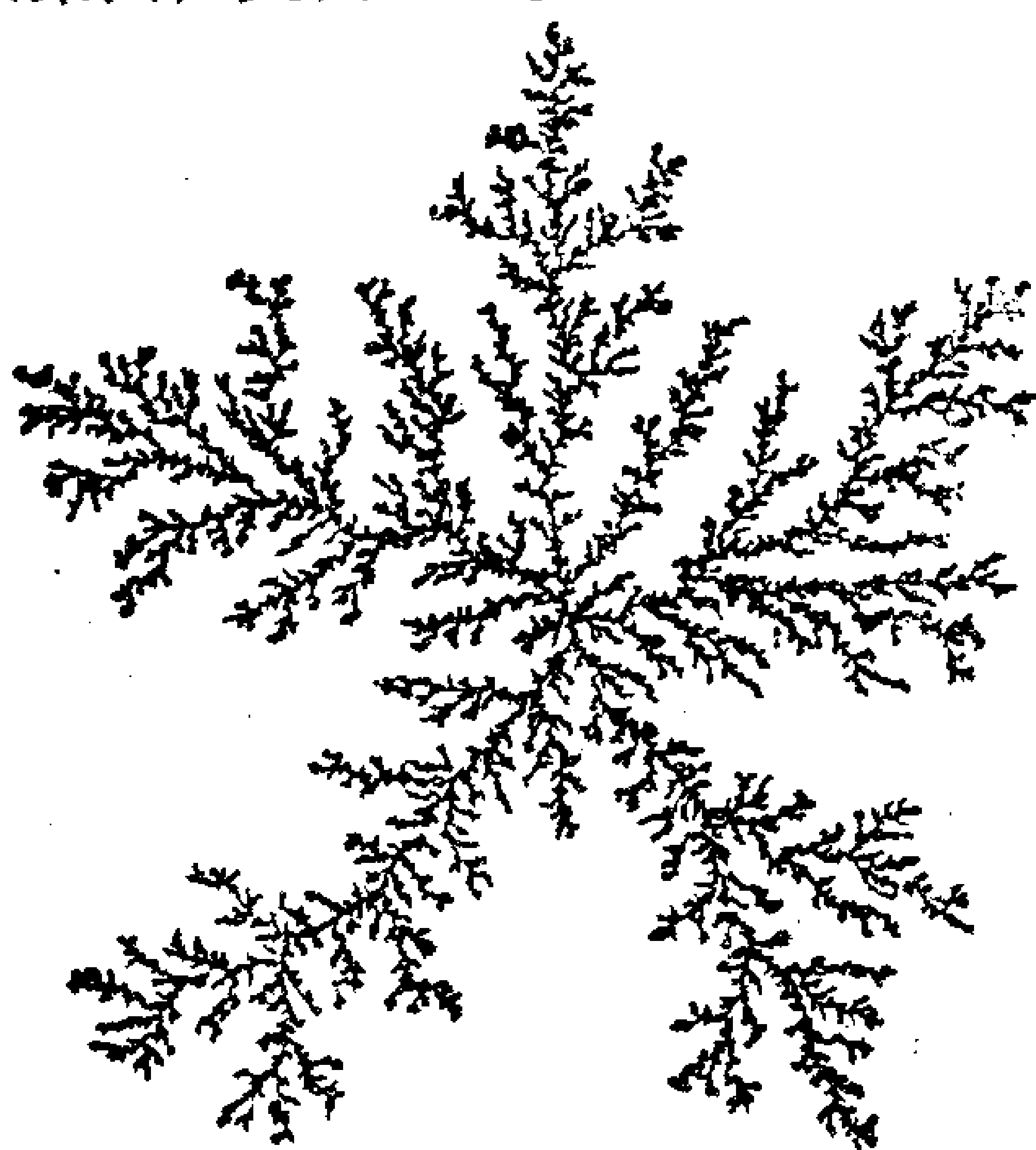


图1.12　二维DLA的凝聚团

从图1.12看出，似乎“杂乱无章”的集团，仍然存在自相似的结构。微粒占据阵点数目随着它的尺寸(从种子微粒开始量度)加大而增多，但不是和尺寸的平方成正比，下面将看到其幂次就是该凝聚团的分数维。图1.13是由顶部释放的微粒和底部的“树

根”接触而形成的生长出的树。

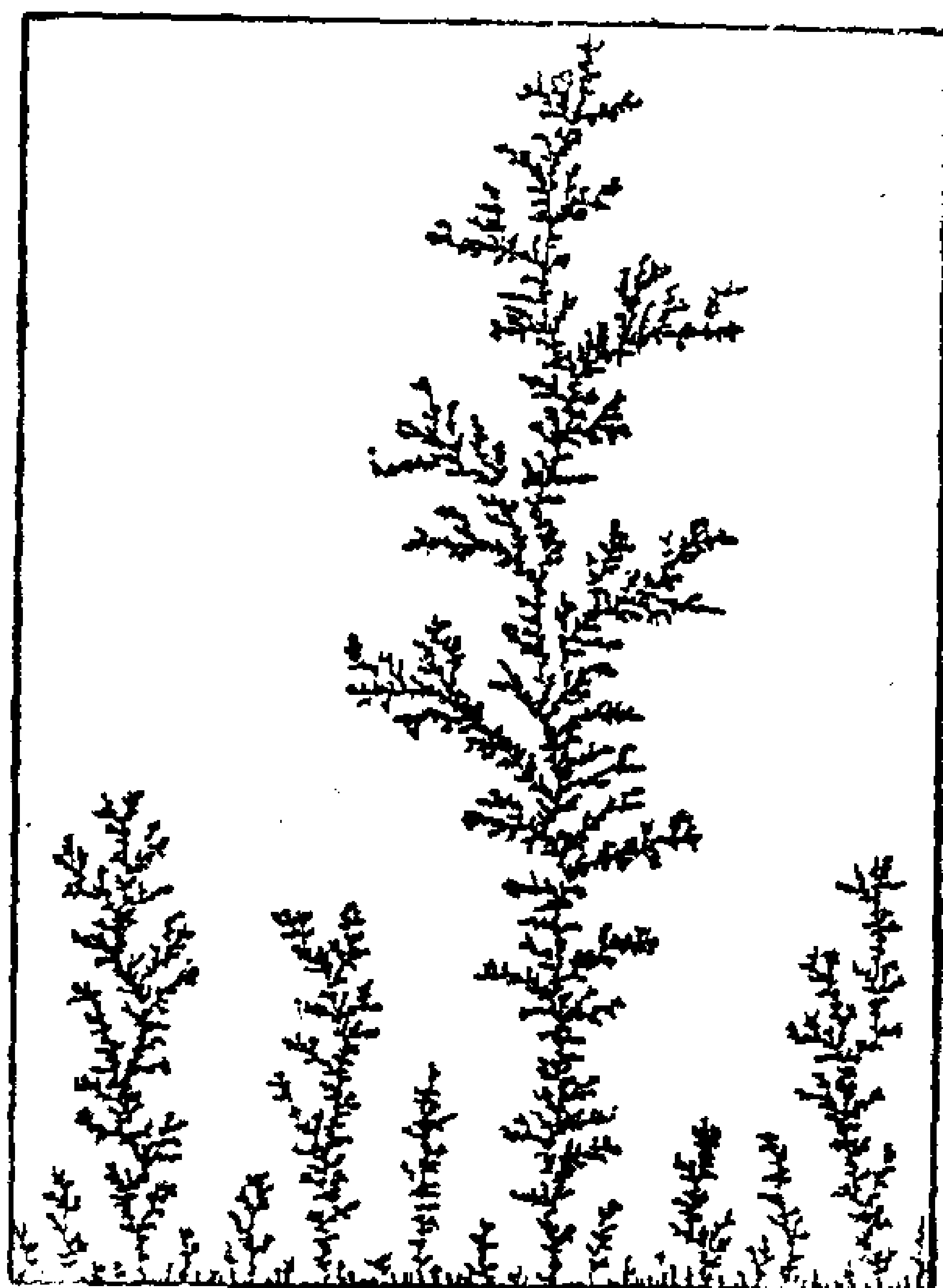


图1.13 由DLA增长出的树

## §8 生物和宇宙全息律

我国科学家张颖清指出，人体有七个穴位：头、肺、肝、胃、脐周、腰和足。而第二掌骨侧也有这七个穴位，它不过是整个人体七个穴位的缩小。这称为生物全息律(bio-holographic law)。根据全息律，生物体是一个大系统，它由许多相对独立的小系统(全息胚)组成。大全息元中含有小全息元，全息元是有层次的。

除了穴位的这种全息律以外，还在其它方面表现的全息律。如生物大分子如DNA、蛋白质是螺旋结构，细胞层次上的微管，宏观层次上人的指纹也是螺旋结构。又如在遗传方面，DNA可以复制，一个DNA分子可以准确地复制出两个完全相同的DNA分子，两个DNA复制成四个DNA，……。即DNA分子内部含有层次不同的“新的DNA”的全部信息。

生物全息律只是宇宙全息律的一部分。一张全息相片，若是破碎成很多小片，我们取出其中的一片，仍可以获得未破碎前的全景图像。这是因为在每个碎片中都贮存有总体的全部信息。

宇宙是由物质组成，物质有不同层次结构就是宇宙全息律的反映。18世纪，人们首先认识到物体是由分子组成的，19世纪初英国化学家道尔顿提出“原子说”，说明分子是由原子组成的。19世纪末又发现比原子更小的物质单元——电子。以后又发现比原子更小的物质层次——基本粒子（质子、中子、中微子、介子等），到1964年又发现比基本粒子更小的层次——层子(或夸克)。

比分子大的物质层次是物体（包括生物体）、天体（恒星、行星、卫星等）、星系、宇宙。就星系和宇宙本身而言，表面上其星星分布是杂乱无章的，但无论从聚合的观点还是从星系分布的观点看，它们仍然服从自相似的结构。

## §9 地 震 活 动

预测地震可以说是最困难的问题之一。但仔细研究还是有规律可寻的。粗看一下，地震愈大，发生的次数愈小，正象海岸线的长度一样，尺度愈大，其长度愈小。但在某一标度区内我们仍然可以找到反映这种自相似的不变量。

在某一区域内地震随时间的分布可以看成是处处稀疏的大量的点的集合。§4中的Cantor集合是每一步都固定去掉中间的三分之一。但如果每一步随机地取掉三分之一（不一定是中间）那么就得到随机的Cantor集合,见图1.14。一次地震就相当于随机Cantor集合中的一个点。

至于地震的空间分布如同星系分布一样，具有某种程度上的自相似性。

我国地震学家刘德富将中国大陆地区强震事件进行排列，发现其序列结构是分节有序可数的。图1.15是中国陆区震级大于

7.5级从1668年到1950年依出现先后排列成序时，发现强震以历经8次中强震为节并依此律（或倍8律）可数地发生在节点上。




图1.14 随机Cantor集合

例如序号2是1679年河北三河8级地震，到序号10是1812年新疆绥定近8级地震。序号18是1879年甘肃武都8级地震，序号26是1931年新疆富蕴地震。

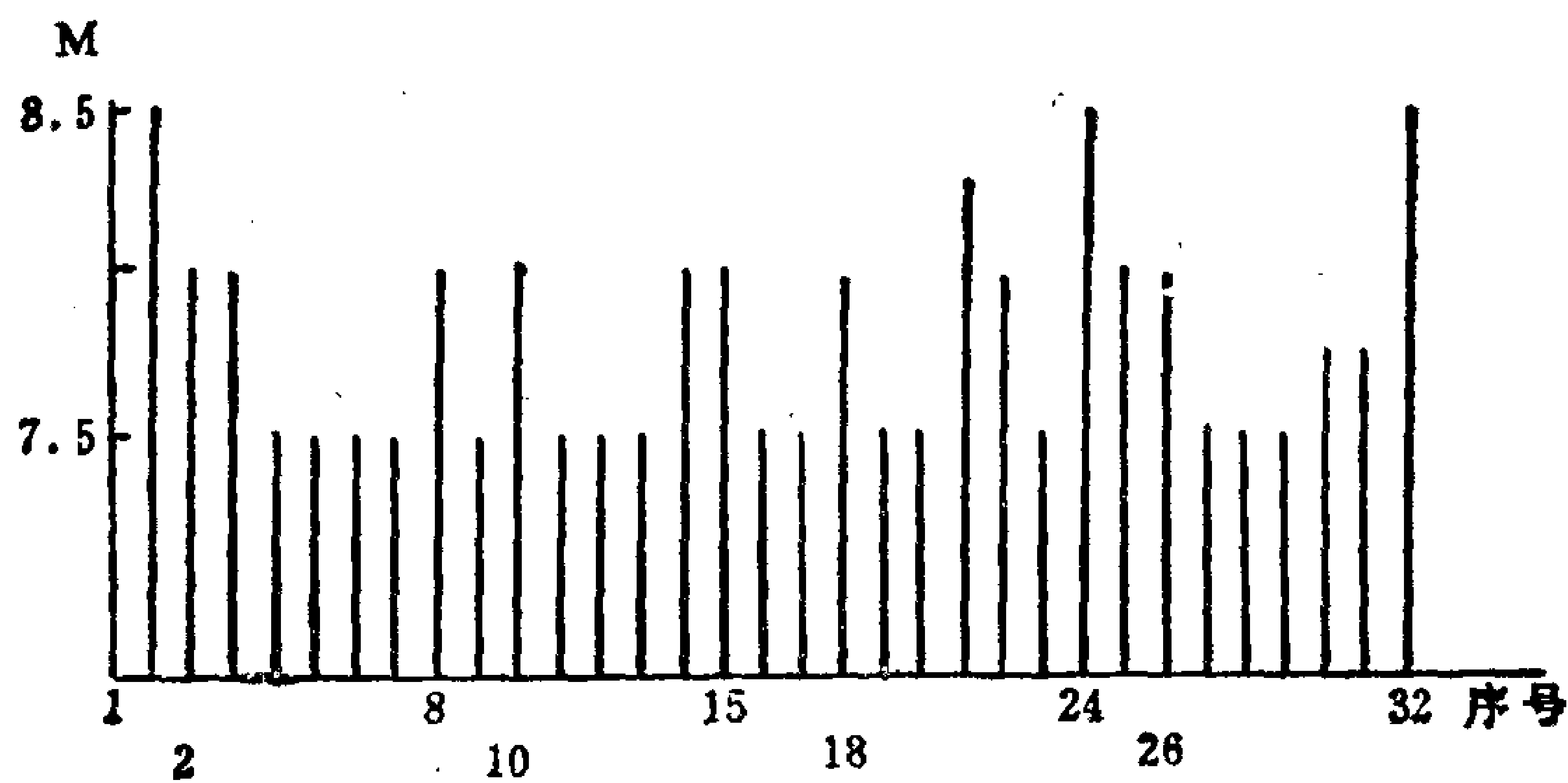



图1.15 中国陆区大于7.5级地震事件序列
(1668—1950)

全中国如此，地方强地震节律也是相似的。图1.16是云南大

于5.9级地震事件序列（1950—1985）。序号1为1950年勐海7级地震，序号7为1955年永仁7级地震，序号15为1970年通海7.8级地震，序号23为1976年龙陵7.3级地震，序号30为1979年普洱6.8级地震，两个序号之间除第一节长度略短外，其余各节都经历八次中强以上地震事件。

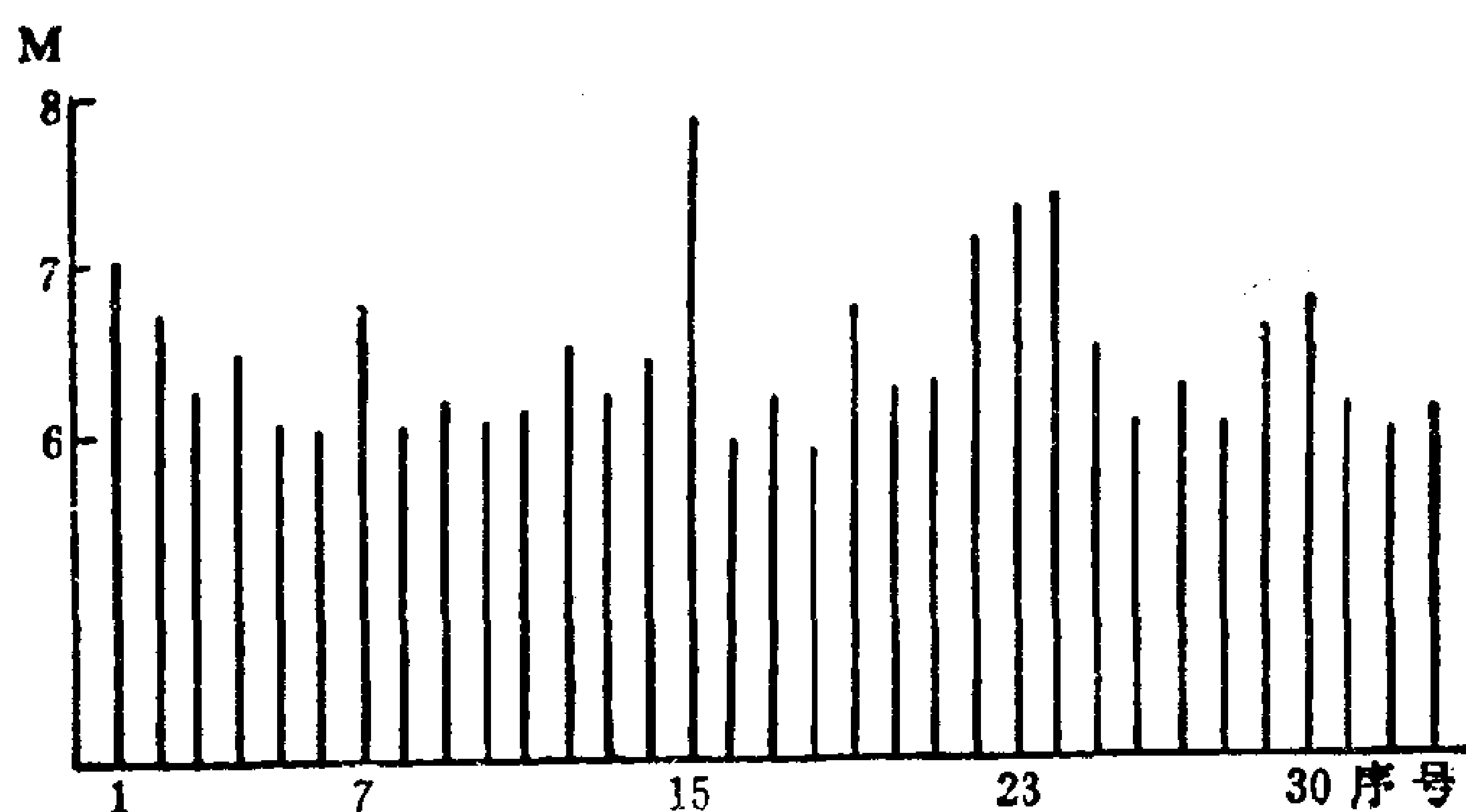



图1.16 云南省大于5.9级地震事件序列（1950－1985）

## §10 气候有周期吗

气候变化已经成为各国政府非常重视的问题，拿气候本身来说，时间尺度和空间尺度都是非常宽的。季节变化、年变化可以称为气候，百年和万年变化也可以叫作气候。因此气候现象中含有大大小小不同的尺度，即并无统一的特征尺度。

虽然如此，但气候不外乎都是研究冷和暖、旱和涝。图1.17中用两个地形槽代表时间尺度比较长的冷状态（例如冰期）和暖状态（例如间冰期）。但是即使在暖的（或冷的）状态（叫吸引子）中间还包括着时间尺度较小的冷的和暖的小槽，这些小槽中间同样还包含有尺度更小的冷和暖的状态。因此小的冷暖槽放大就犹如大的冷暖槽一样，这就是自相似的结构。

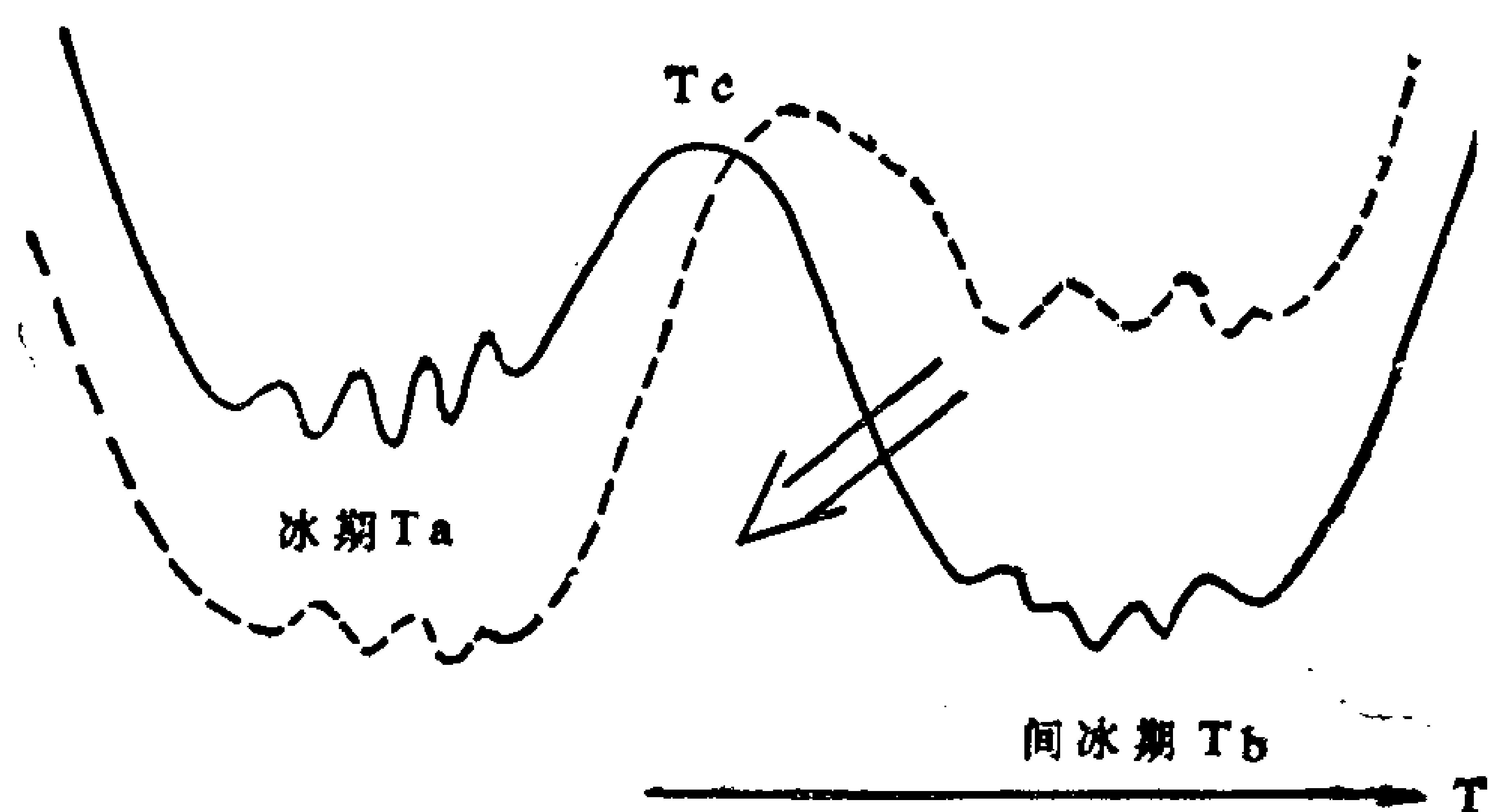



图1.17 多种尺度的气候吸引子

从以上自然界实际存在的各种现象中，我们看出它们都有一个共同的特征：无特征尺度却有自相似的结构。这些现象表面上看似乎是杂乱无章的，但是存在着规律性。因此分形概念的提出，大大丰富了我们对自然界的认识。

下表列出了分形和欧几里德形状的主要差别，说明我们对自然界认识的发展。

**表1.1 分形和欧几里德形状的区别**

| | 欧几里德形状 | 分 形 |
|---|---|---|
| 年 代 | 大于2000年 | 最近10年 |
| 特征尺度 | 有特征尺度 | 无特征尺度却有标度律 |
| 形 状 | 适合人造物体 | 适合自然界形状 |
| 公 式 | 用公式表示 | 递推运算 |

# 第二章　分形的意义

## §1　分形的定义

上章介绍的自然界的分形现象，它们均有一个共同的特点：没有统一的特征尺度，却有自相似的结构（即存在标度律）。由于分形是一个新的概念，我们还是从实例入手来阐述它的意义。以海岸线为例，我们如何来描述它呢？假如海岸线是图2.1那样的直线（设它的长度$L=1$），那么用尺度为$r$的尺子去量它，不管$r$的大小量出来的长度总是1，即

$$L=r^0 \tag{2.1}$$

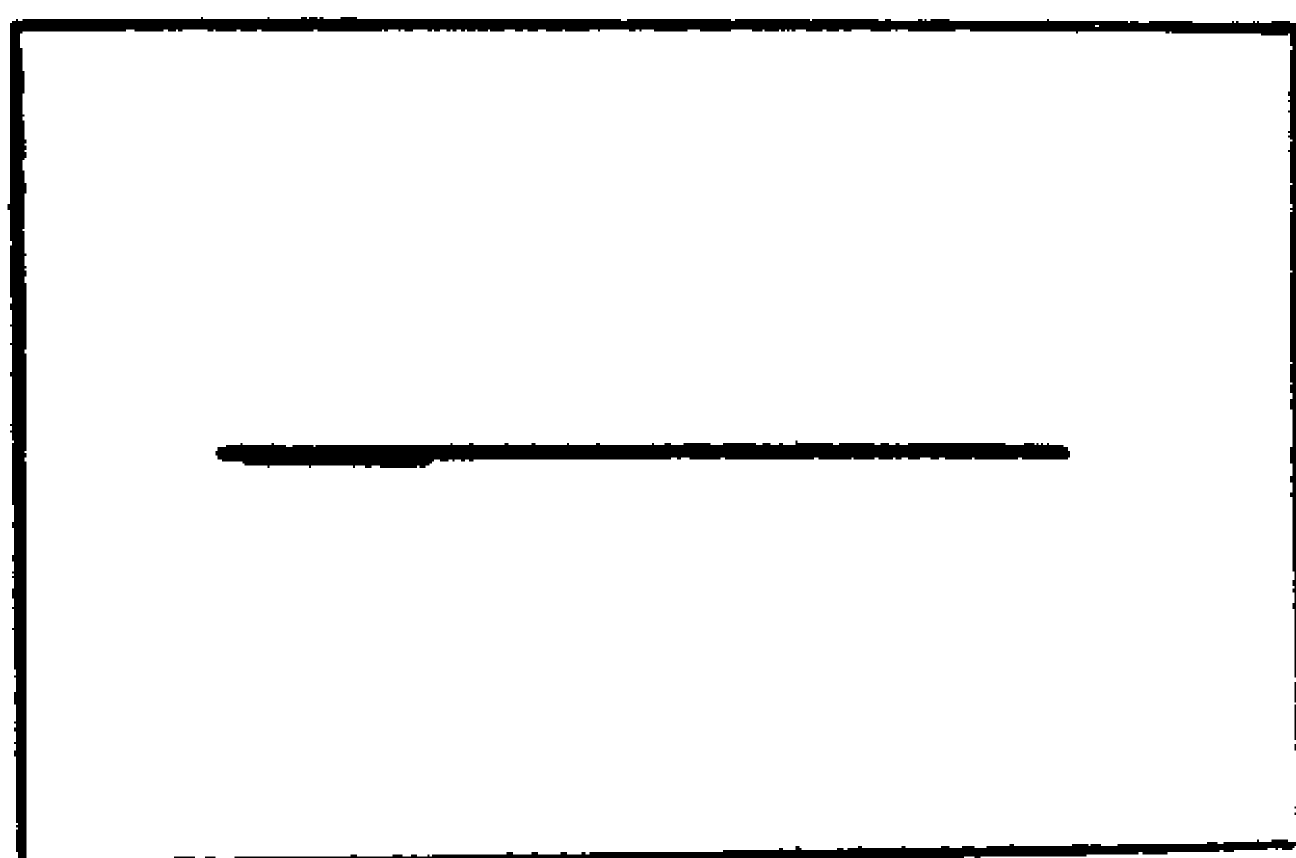


图2.1　线的长度不随尺子$r$大小而改变

而第一章介绍的实际海岸线，其长度$L$就随尺子$r$的减小而加长。图2.2是一种理想化的实际海岸线的一种。

对这种海岸线，若尺子$r$的长度为$\frac{1}{3}$，那么量出的海岸线长度$L=\frac{4}{3}$。若$r=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$，则量出的长度$L=\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$，……，依此类推，若海岸线用$r=\left(\frac{1}{3}\right)^n$去量，那么其长度$L$就是$\left(\frac{4}{3}\right)^n$。

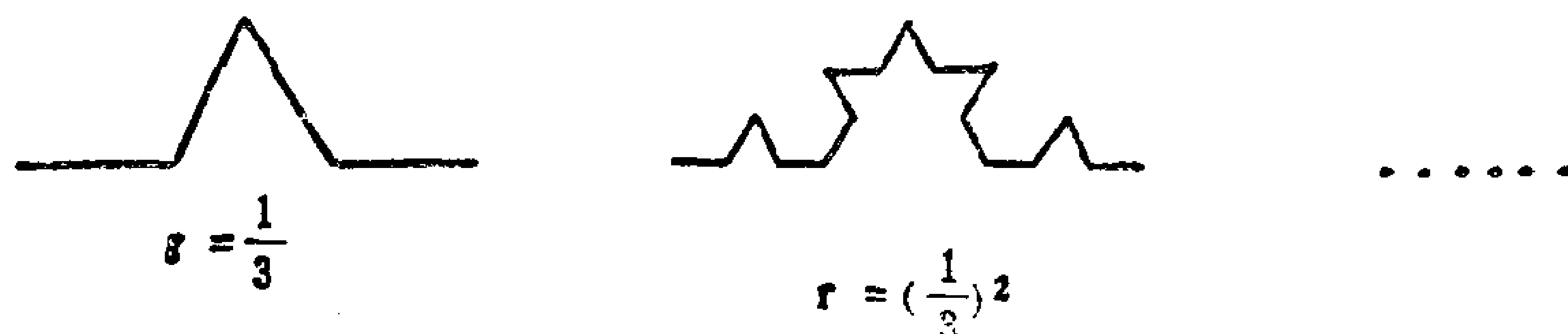



图2.2　一种典型的海岸线

因此，我们若设$L$和$r$的关系为

$$L = r^{\mu} = N(r)\cdot r \tag{2.2}$$

其中$N(r)$是用$r$去量海岸线所得到的长度为$r$的段数。用$r=\left(\frac{1}{3}\right)^n$，

$L=\left(\frac{4}{3}\right)^n$代入（2.2）式得到

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]^{\mu} \tag{2.3}$$

将（2.3）式两边取对数，很易求到（2.2）式中的系数$\mu$

$$\mu = 1 - \frac{\log 4}{\log 3} = 1 - D \tag{2.4}$$

其中

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.2618 \tag{2.5}$$

就是图2.2那种海岸线的分数维。这样，海岸线的长度$L$和尺子$r$的关系为

$$L = r^{1-D} \tag{2.6}$$

其中$D$称为分数维的道理是很显然的，因为若（2.6）式中的$D$是整数1，那么（2.6）式就化为规整的直线（2.1）式。现在$D$是分数，且大于1。那么

$$L = r^{-0.2618} \tag{2.7}$$

因而$r$愈小，$L$愈大。为什么海岸线的维数大于1呢？我们可以作如下的理解：从"线"这个角度看，它的维数应是1，但是它又弯

弯曲曲，$r\to 0$ 时海岸线长度$L\to\infty$，所以它又不是一般规整的"线"，似乎应该是"面"（因为二维的面可以看成是无穷的线段所组成），但它还没有充满整个平面，所以它的维数应小于2。这样海岸线的维数应是

$$1<D<2 \tag{2.8}$$

将（2.2）式和（2.4）式结合起来有

$$N(r)=\frac{1}{r^D}\text{或}D=\frac{\log N(r)}{\log(\frac{1}{r})} \tag{2.9}$$

（2.9）式可以作为分数维$D$的定义。（2.9）式的意义是，用边长为$r$的小"立方"块去覆盖客体，量出的小立方块的最小个数是$N(r)$。

定义（2.9）式显然包含了规整对象，图2.3是规整的线、面、体。

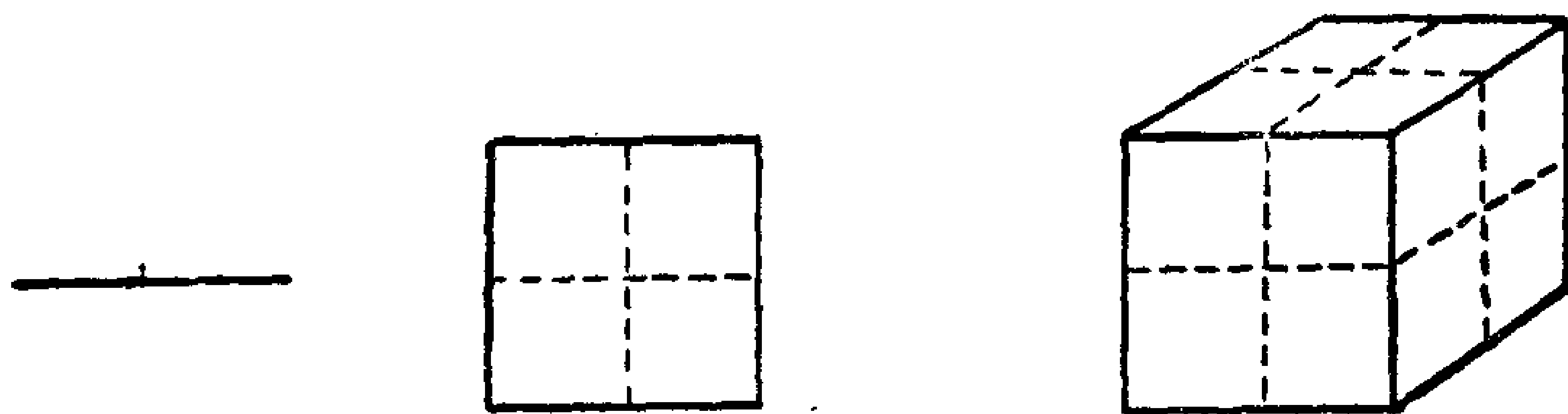


图2.3　规整的线、面、体的维数$D=1,2,3$

若它们的边长均为1，显然用$r=\frac{1}{2}$的线（小方块或小立方体）去量分别得到$N=2，4，8$，故按（2.9）式它们的维数$D$分别是1，2和3。

## §2　分数维大于拓扑维但小于所占领的空间维

§1的海岸线的维数大于1而小于2。从线的角度讲，它的

拓扑维是1。同时它又未充满平面，因而其维数小于2。这例子说明分数维一定大于拓扑维而小于它所占领的空间维。

根据这个意义，我们很易判断一个分形对象的分数维所处的范围。

第一章§4的Cantor集合，它是点的集合，故其拓扑维是零。但它又不充满一条线（其维数是1），故Cantor集合的维数一定是

$$0 < D < 1 \tag{2.10}$$

按定义（2.9）式，图1.3的传统的Cantor集合，若$r=\frac{1}{3}$，则$N=2$，故其维数

$$D=\frac{\log 2}{\log\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)}=0.6309 \tag{2.11}$$

例题：求Cantor集合的长度

解：因为每次去掉的长度，依次为$\frac{1}{3}$，$2\left(\frac{1}{9}\right)$，$4\left(\frac{1}{27}\right)$，……，所以总共去掉的长度为如下无穷级数的和：

$$\frac{1}{3}+2\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\left(\frac{1}{3}\right)^3+8\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{3}\left[1+\left(\frac{2}{3}\right)^1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots\cdots\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)}\cdot\frac{1}{3}=1$$

去掉的部分是Cantor集合（闭集）的补集（开集），故Cantor集合的长度（也即Lebesgue测度）为

$$1-\left[1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots\cdots\right]\Big/3=1-1=0$$

即这是点数为无穷、长度为零的集合，也称为“瘦”的Cantor集

合。

图1.4的两种Cantor集合，分别取$r=\frac{1}{4}$和$r=\frac{1}{9}$，而得到$N=2$和$N=3$。因而按（2.9）式，它们的分数维分别是

$$D=\frac{\log 2}{\log 4}=0.5,\quad D=\frac{\log 3}{\log 9}=0.5 \qquad (2.12)$$

对于第一章§3的Sierpinski海绵或垫片，它们实际上是将一个面掏空的线段的集合，因而其拓扑维应是1。同时在面上有很多空隙，因而其维数应小于2。故Sierpinski海绵或垫片的维数一定是

$$1<D<2 \qquad (2.13)$$

对于图1.2(a)，取$r=\frac{1}{2}$为边长的小三角形去量，得到的数目$N=3$，故据（2.9）式有

$$D=\frac{\log 3}{\log\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)}=1.58\cdots\cdots \qquad (2.14)$$

对于图1.2(b)，取$r=\frac{1}{3}$为边长的小正方形去量，得到的数目$N=8$，故据（2.9）式有

$$D=\frac{\log 8}{\log 3}=1.89\cdots\cdots \qquad (2.15)$$

总之，$1<D<2$的分形对象可以看成是线段长度为无穷而面积为零的东西。

根据这种分析，图1.9到图1.13的各种自然图像，其维数也一定是大于1而小于2。当然究竟是多少，下面我们仍可介绍实际的算法。

同样，若对一个边长为1的正立方体，其六面的中间分别穿一个边长为$\frac{1}{3}$的空（打通），这样不断做下去，最后只能形成有

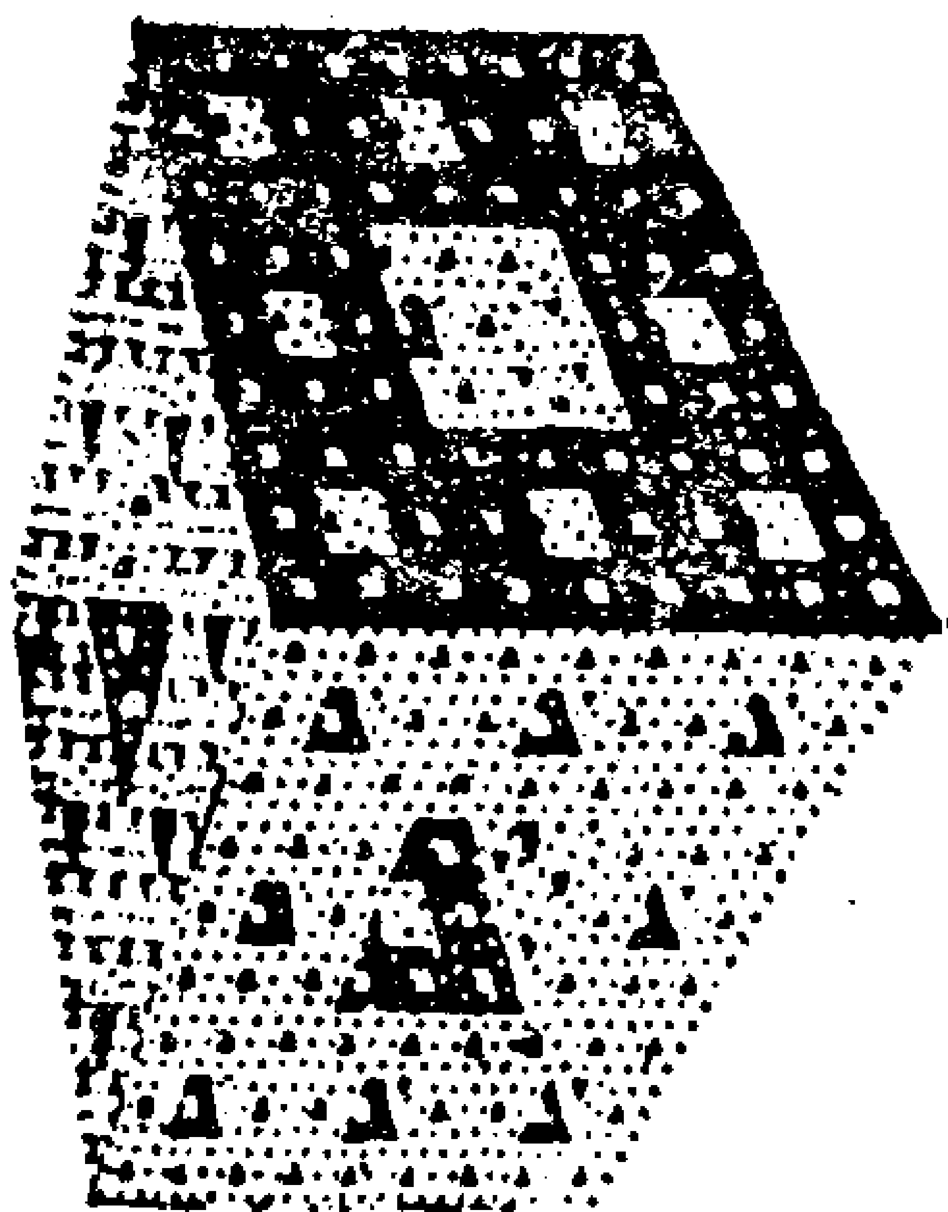


图2.4　有皮没有体积的分形

表皮而无体积的分形对象，见图2.4。因为它是面，所以其拓扑维是2，同时它又未充满三维空间，所以其维数应小于3。故它的维数一定是

$$2<D<3 \qquad (2.16)$$

据（2.9）式，取$r=\frac{1}{3}$为边界的小立方体去量，得到的数目$N=20$，故

$$D=\frac{\log 20}{\log 3}=2.72683\cdots\cdots \qquad (2.17)$$

一棵长满很多树叶的树，很容易判断它的维数也是大于2而小于3，因为你可以将它看成是面积无穷而体积为零的对象。

有时（2.9）式中$N(r)$和$r$之间的联系不很明显。例如考虑点集$S\left\{x|x=\frac{1}{n},n=1,2,\cdots\cdots\right\}$，说明其分数维$D=\frac{1}{2}$。

我们将点集分成两部分：前$m$个点$\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\frac{1}{m}\right)$和剩下的部分$\left[0,\frac{1}{m}\right]$。因为相邻两点间的距离是$\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n(n-1)}\geqslant\frac{1}{m(m-1)}>\frac{1}{m^2}$ $(n\leqslant m)$，所以若取$r=\frac{1}{m^2}$，那么覆盖前$m$个点的最小数目是$m$，同样剩下的$\left[0,\frac{1}{m}\right]$间的点也要另外$m$个小段覆盖。故$N(r)=2m$，则

$$D=\lim_{m\to\infty}\frac{\log 2m}{\log\left(\frac{1}{\frac{1}{m^2}}\right)}=\frac{1}{2}$$

## §3 复杂性的量度

分形既然是自然界存在的复杂现象，因此$D$的数值无论从理论上还是从实际上对研究复杂现象有很大意义。

图2.5是另外三种人造的海岸线。

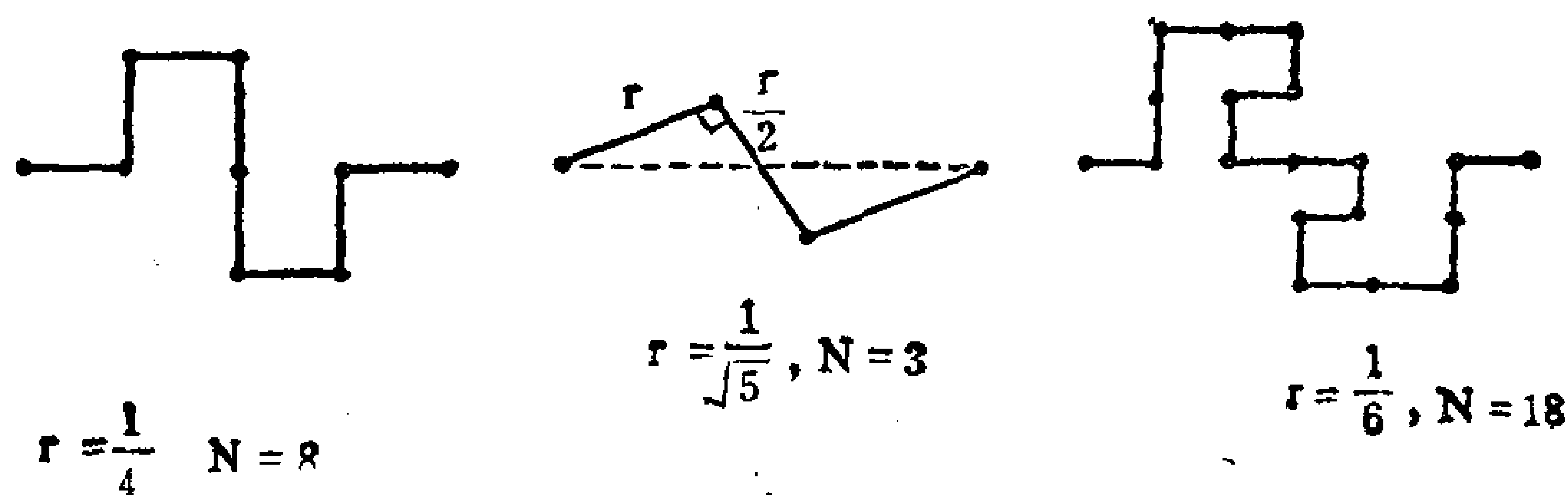



图2.5 三种不同的海岸线

按（2.9）式，它们的维数分别是：

$$\begin{cases} D=\dfrac{\log 3}{\log\sqrt{5}}=1.365 \\ D=\dfrac{\log 8}{\log 2}=1.5 \\ D=\dfrac{\log 18}{\log 6}=1.613 \end{cases} \qquad (2.18)$$

维数一个比一个大。确实海岸线也一个比一个复杂，即弯弯曲曲的程度一个比一个大。

同样一个二维的锥形表面，若在其上添加一些不规则的小的毛刺，如小草、小树、小石头等。它们会形成各种不同的美丽的风景。添加的毛刺愈不规则，其他表面愈粗糙，风景愈美丽。图2.6是分维分别为2.15，2.5和2.8的三种风景。所以说分维数值$D$的大小是复杂程度的一种量度。尽管分形对象是复杂的，但是我们仍然可以找到一个不变测度——分数维。

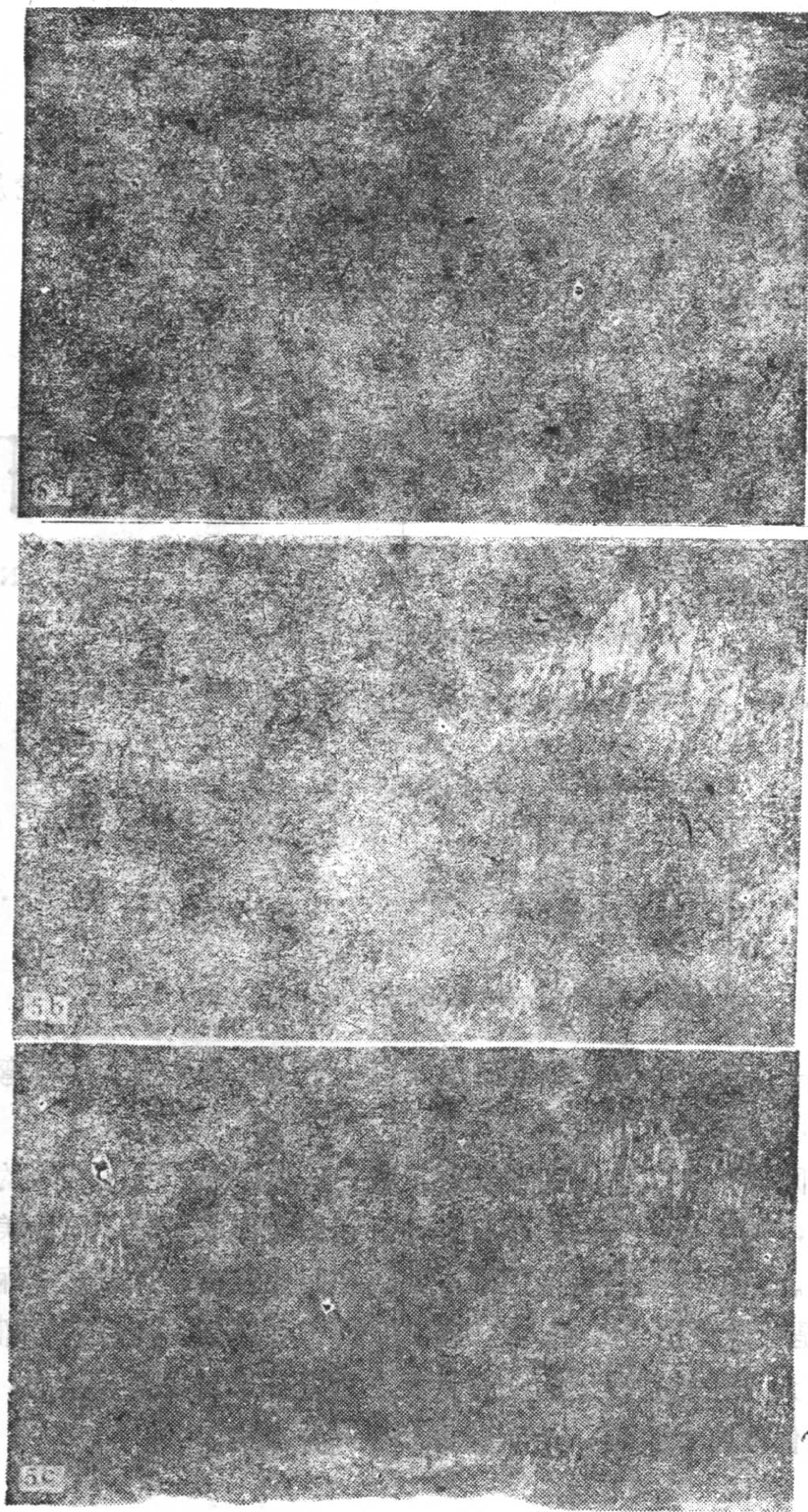


图2.6　三种不同维数的地形

## §4 湍流间歇性的量度

湍流是由大大小小尺度不同的涡旋所组成，大涡旋包含着小涡旋。大气中最大的涡旋尺度可达数千公里，最小的涡旋只有几毫米。图1.1用一个大的方块（边长为1）来形容最大涡旋，它们包含着三个小涡旋$\left(边长为\frac{1}{2}\right)$，而每个小涡旋又包含着三个更小涡旋（边长为1/4），这样一种串级过程（cascade）最终小涡旋并不充满整个空间的，而是间歇的。

据（2.9）式，我们用边长$r=\frac{1}{2}$的小正方形去量而得到涡旋数目为$N=3$，故这种间歇涡旋构成的二维湍流的维数为

$$D=\frac{\log 3}{\log 2}=1.5849 \tag{2.19}$$

从三维空间上看，我们可以设想一个面积$S=1$的涡度片，然后将其分成九个小方块，去掉四个角和中间的小方块，向上或向下伸展出五个小立方块，每个小立方块相当于一个小涡旋，见图2.7。

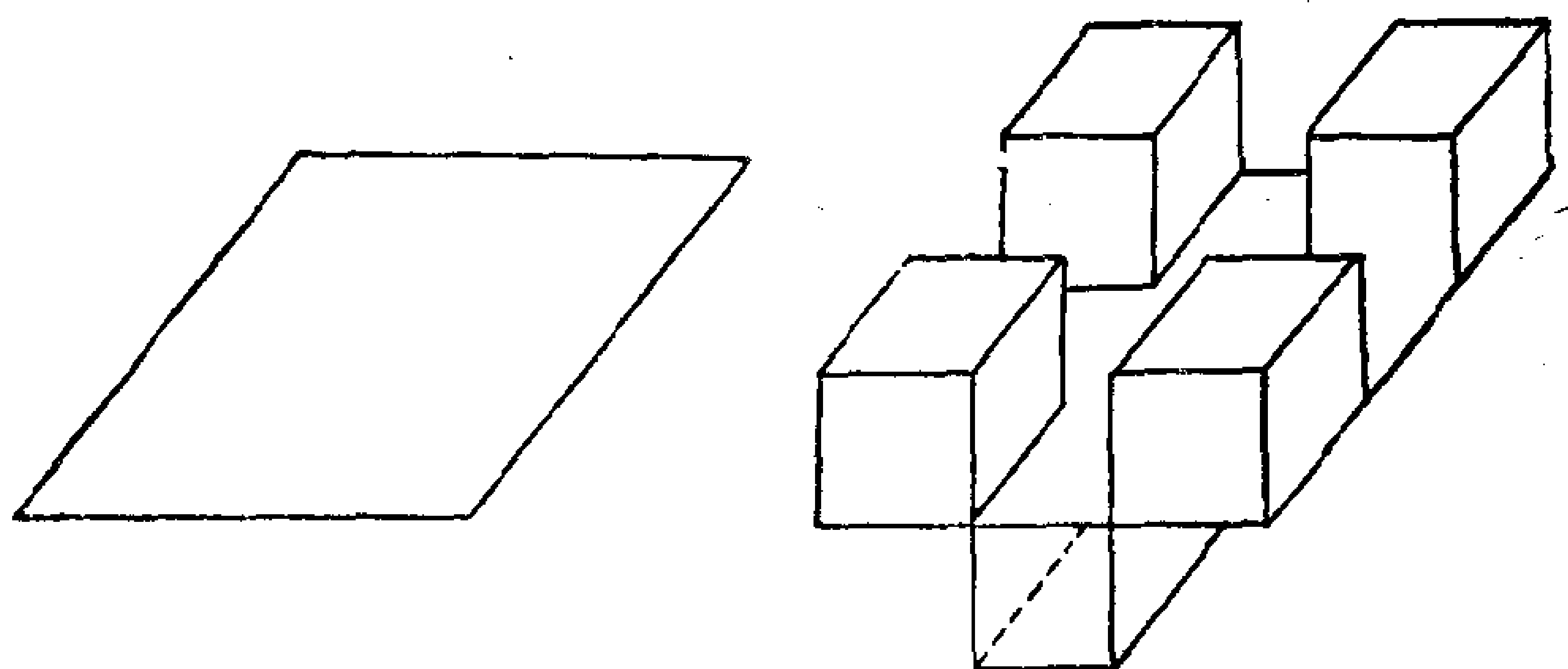


图2.7　间歇湍流

这样的小方块共有$5\times5+4=29$个。不断地重复上述过程就

变成面积为无穷而体积为零的分形对象，但是它并未充满整个三维空间，所以其维数一定介于2和3之间。

设$n$次以后总面积为$S_n$，则它和小方块面积$\left(\frac{1}{9}\right)^n$之间的关系为

$$S_n=\left(\frac{29}{9}\right)^n=\left[\left(\frac{1}{9}\right)^n\right]^\mu \tag{2.20}$$

从（2.20）式很容易求出

$$\mu=1-\frac{\log 29}{\log 9}=-0.54$$
$$=2-D \tag{2.21}$$

其中

$$D=1+\frac{\log 29}{\log 9}=2.54 \tag{2.22}$$

就是三维间歇湍流的分数维。若是规整对象，$D=2$，$\mu=0$，因而$S_n=1$即其面积不随尺子变化而变化。现在$\mu<0$，由（2.20）式看出$S_n$随$r$的减小而变大，这正是分形的特征。

对于图1.9的雪花以及图1.10，1.11，1.12，1.13这样的分形都可以看成是未充满二维（平面）空间的间歇现象。因此分形可以说是间歇性的量度。

## §5 自相似和标度不变性

第一章介绍的自然界的分形现象都具有自相似的结构。即一个分形对象，其空间尺度$r$（或时间尺度$t$）变换成$\lambda r$（或$\lambda t$）后，其结构特征不变，只是原来的放大或缩小，这叫做标度不变性。由（2.9）式得：

$$N(\lambda r)=\frac{1}{(\lambda r)^D}=\lambda^{-D}N(r) \tag{2.23}$$

即尺度由$r$变成$\lambda r$后，$N(r)$乘以$\lambda^{-D}$后即变成$N(\lambda r)$。

拿海岸线的长度（2.6）式来讲也有

$$L(\lambda r)=\lambda^{1-D}L(r) \tag{2.24}$$

对处处连续但不可微的Weierstrass 函数（1.1）式而言，也有标度不变性（1.2）式，即

$$c(\lambda t)=\lambda^{2-D}c(t) \tag{2.25}$$

一般我们把

$$f(\lambda r)=\lambda^{\alpha}f(r) \tag{2.26}$$

称为标度律，$\alpha$叫标度指数，其中$r$也可以是时间坐标$t$。一般$0<\alpha<1$。

对图2.2的海岸线可以看作是平面上的点集$(x_1,x_2)=(t,f(t))$，设尺度比$\lambda=r=\left(\frac{1}{3}\right)^n$，$n=0,1,2\cdots\cdots$，则有性质

$$f(\lambda t)=\lambda^{\alpha}f(t) \tag{2.27}$$

其中$\alpha=1$。

注意虽然函数$f(t)$不是单值的，但（2.27）式的标度律对该点集上的任何点都成立。

标度律（2.26）式说明，尽管分形现象是复杂的，但是存在着标度不变性，标度指数$\alpha$是和分维$D$有关的不变量。

## §6 相变和临界指数

连续相变是大量粒子的集合效应。一块处于高温下的磁铁，微观粒子的磁矩杂乱无章地排列着，在宏观上却表现不出磁性。但当温度逐渐下降到“居里点”，突然沿某个方向出现了宏观磁矩，对称性从绕一切方向的转动对称，下降到沿宏观磁矩方向的一种转动，出现了有序的磁化状态。

我们若把铁磁相变看成是大量晶格上自旋相互作用的结果。图2.8左边是原来的晶格，著名的Ising模型就是将每边两个自旋合起来组成自旋块，如图中的方框所示，而变成图2.8右边的有

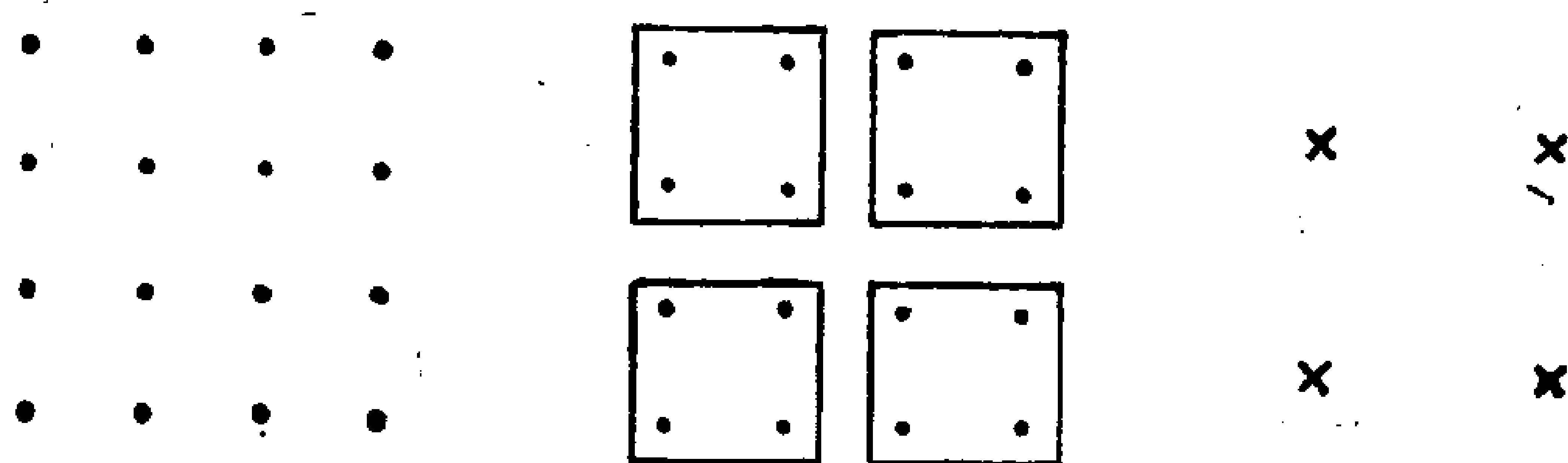


图2.8　自旋集团模型

效晶格。现在相当于“尺子”变长了，即

$$T_c - T \longrightarrow \lambda(T_c - T) \tag{2.28}$$

其中$T_c$是临界温度。因而磁矩之间的关联长度$\xi$就相应地缩小了一半，即

$$\xi[\lambda(T_c - T)] = \lambda^{-\nu}\xi[T_c - T] \tag{2.29}$$

其中$\lambda^{-\nu} = \frac{1}{2}$，$\nu$叫临界指数。

(2.29) 式就是由Kadanoff提出的重整化群方法的基础，而K.G.Wilson发展了临界现象的重整化群理论，于1982年获诺贝尔奖。

(2.29) 式的解就是

$$\xi(T) = (T - T_c)^{-\nu} \tag{2.30}$$

或

$$T - T_c \sim \xi^{-\frac{1}{\nu}} \tag{2.31}$$

若将$T - T_c$理解为 (2.23) 式中的$N$，$\xi$理解为 (2.23) 式中的$r$，则 (2.31) 式即是

$$N(\lambda r) = \lambda^{-D} N(r) \tag{2.32}$$

故其中的分数维

$$D = \frac{1}{\nu} \tag{2.33}$$

所以 (2.30)，(2.31) 式就是相变现象中的标度律，相变也是一种分形现象。

## §7　功率谱指数和分维

浑沌时间序列反映物理过程是非周期的，因而它的功率谱应是连续的，则功率$S(f)$或$S(k)$随频率$f$或波数$k$的变化可表示为

$$S(f)\sim f^{-\beta}=t^{\beta} \tag{2.34}$$

$$\text{或}S(k)\sim k^{-\beta}=r^{\beta} \tag{2.35}$$

其中$\beta$叫功率谱指数。

另一方面，若时间序列 $P(t)$或空间分布$P(r)$是 分形现象，则它们的标度律应是

$$P(t)\sim t^{\alpha}\text{或}P(r)\sim r^{\alpha} \tag{2.36}$$

其中$\alpha$是标度指数。$\alpha$和$\beta$的关系很易求得，由量纲分析知

$$\begin{cases} P^2(t)\sim fS(f)=\dfrac{1}{t}t^{\beta}=t^{\beta-1} \\ \text{或}P^2(r)\sim kS(k)=\dfrac{1}{r}r^{\beta}=r^{\beta-1} \end{cases} \tag{2.37}$$

将（2.36）式和（2.37）式比较得到

$$\beta=2\alpha+1 \tag{2.38}$$

若把单变量的时间序列看成是一条线，它应该是一维的，但是它是在一线上迭加上不均匀的涨落造成的，故其拓扑维$d=1$应小于分数维$D$，一般$D$和$\alpha$的关系为

$$D=d+1-\alpha \tag{2.39}$$

对$d=1$的单变量时间序列，由（2.39）式

$$D=2-\alpha \tag{2.40}$$

或

$$\alpha=2-D \tag{2.41}$$

将（2.41）式代入（2.38）式便导得谱指数$\beta$和分维$D$的关系

$$\beta=5-2D \tag{2.42}$$

（2.42）式将功率谱指数$\beta$和分维$D$联系起来。图2.9分别是高斯

白噪声($a$)，$1/f$噪声($b$)和褐色噪声（布朗运动)($c$)的时间序列和它们相应的功率谱。

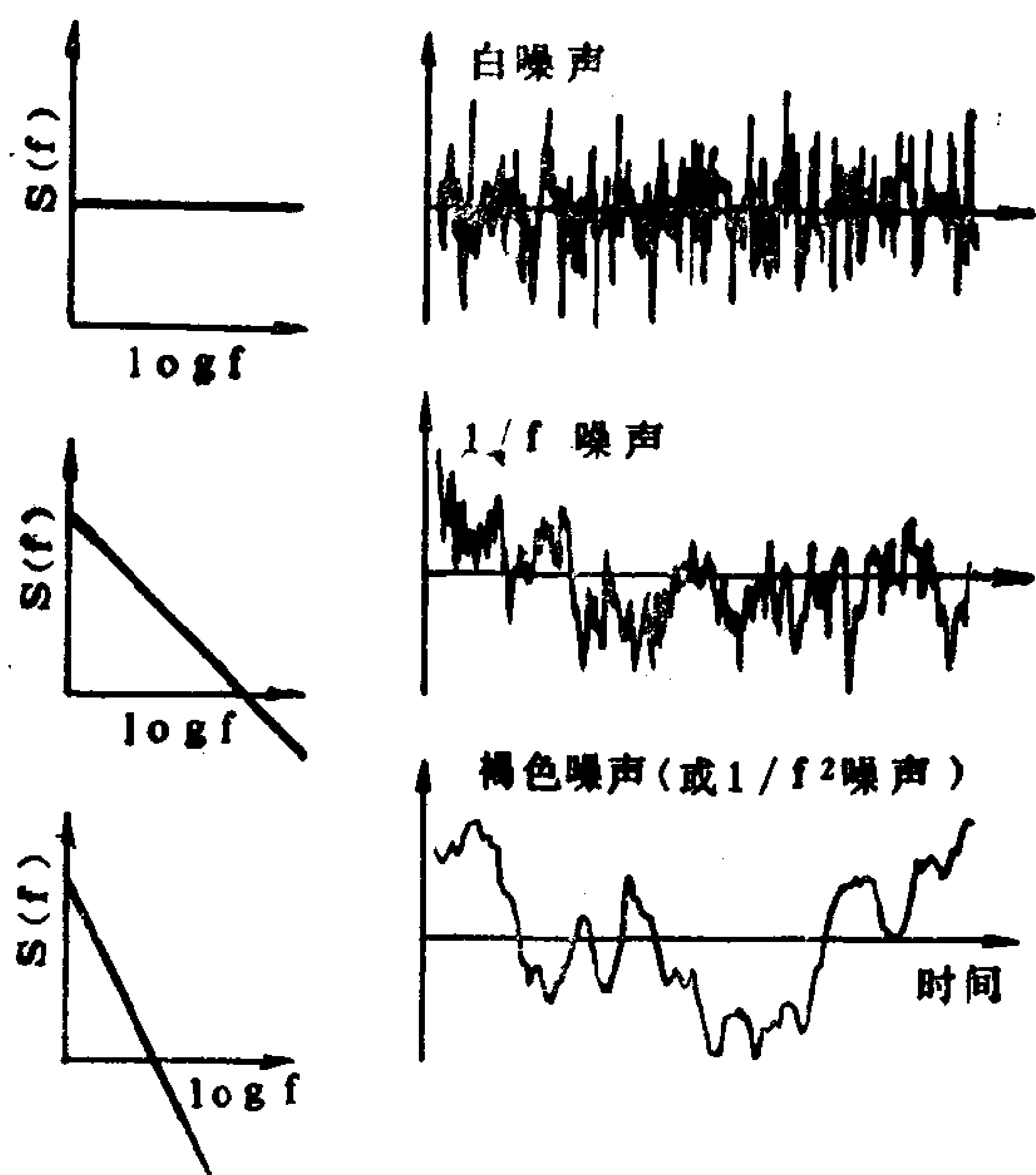



图2.9 高斯白噪声，1/f噪声，褐色噪声的功率谱指数$\beta$和分维$D$

(a) $\beta=1.2$, $D=1.9$

(b) $\beta=1.0$, $D=2.0$

(c) $\beta=2.0$, $D=1.5$

## §8 带有不等比的标度

前面图1.5是不等比的Canton集合，最初$l=1$的一段分成$l_1=\frac{1}{4}$和$l_2=\frac{2}{5}$的两段，而去掉中间的$\frac{7}{20}$。如何测量它们的分维呢？

我们仍然用$r$的小尺子去量，设每段量出的数目分别为$N_1(r)$和$N_2(r)$，故总数

$$N(r)=N_1(r)+N_2(r) \tag{2.43}$$

由于每个小段都和一个大段自相似，按定义（2.9）式有

$$N_1(l_1r)=N_2(l_2r)=N(r)=r^{-D} \tag{2.44}$$

故（2.43）式右边的$N_1(r)$和$N_2(r)$分别应为

$$N_1(r)=\left(\frac{r}{l_1}\right)^{-D}, \quad N_2(r)=\left(\frac{r}{l_2}\right)^{-D} \tag{2.45}$$

将（2.44），（2.45）式代入（2.43）式有

$$r^{-D}=\left(\frac{r}{l_1}\right)^{-D}+\left(\frac{r}{l_2}\right)^{-D}$$

即

$$l_1^D+l_2^D=1 \tag{2.46}$$

一般若分成$N$段不等比$r_i$的小段，则（2.46）式可写为

$$\sum_{i=1}^{N} r_i^D=1 \tag{2.47}$$

若所有$r_i$相等，则（2.47）式就化为（2.9）式。

对图1.5的Cantor集合，$l_1=\frac{1}{4}$，$l_2=\frac{2}{5}$，有

$$\left(\frac{1}{4}\right)^D+\left(\frac{2}{5}\right)^D=1 \tag{2.48}$$

算出分维数

$$D=0.6110 \tag{2.49}$$

例题：一般化的Cantor集合，单位长度分成三份，一份长$\Delta_1$，一份长$\Delta_2=K\Delta_1$（$K$是整数），去掉的长度为$(1-\Delta_1-\Delta_2)$，求其维数。

解：若我们按照定义（2.9）式来计算，取$r_1=\Delta_1$来量，得到$N(\Delta_1)=1+K$段。但是下一阶段，该Cantor集合的四段分别为$\Delta_1^2$，$\Delta_1\Delta_2$，$\Delta_1\Delta_2$和$\Delta_2^2$，其总长度为$(\Delta_1+\Delta_2)^2$，因此用$r_2=\Delta_1^2$去量，我们一定能用$(1+K)^2$段来覆盖该集，但一般这不是最小数目。继续下去，用$r_n=(\Delta_1)^n$去量，那么$(1+K)^n$段一定可以覆盖该集，因此这是$N(r_n)$的上界，故得到$D$的上界为

$$D \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+K)^n}{\log\left(\frac{1}{\Delta_1^n}\right)} = \frac{\log(1+K)}{\log\left(\frac{1}{\Delta_1}\right)}$$

上式取等号仅仅当$K=1$时。

为了符合自相似和标度不变性，应该用（2.47）式来计算，即

$$(\Delta_1)^D + (K\Delta_1)^D = 1$$

## §9 生长现象的分维

前面谈的自相似的分形，意味着在尺度变换下其结构不变。再以二维聚合增长为例。图 2.10 的中心点原来是直径为一个单位的小质点球，然后从$\pm x$及$\pm y$两边聚合上四个直径为一个单位的小质点球，共五个小质点球。下次聚合就变成 9 个小质点球。依此类推。

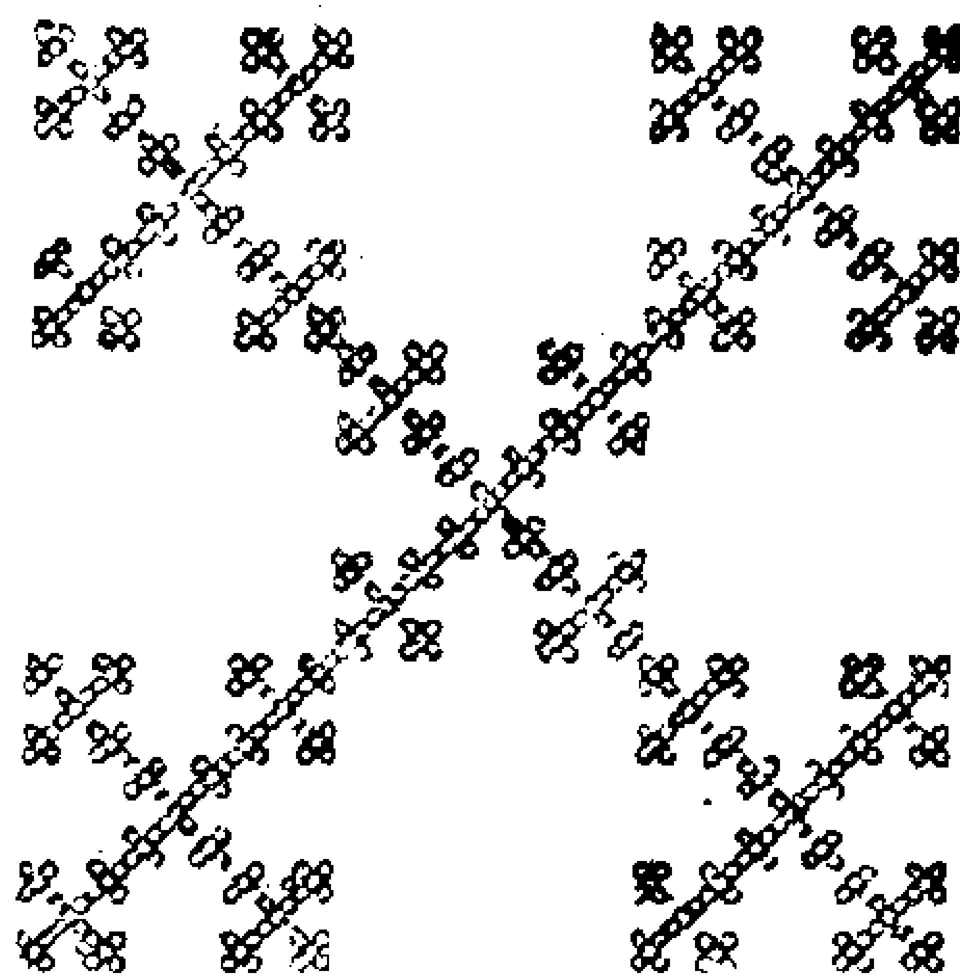


图2.10 二维自相似分形聚合

这种远离平衡的生长现象，利用（2.9）式来量度其分维就不太方便了。为此我们令$l=\frac{1}{r}$，则（2.9）式化为

$$N(l) = l^D \text{或} D = \frac{\log N(l)}{\log l} \tag{2.50}$$

（2.50）式说明，若其线段放大$l$倍，则量出的小“立方”块数目$N(l)$就是$l^D$。对于图2.10而言，$l=3$时$N=5$，故

$$D = \frac{\log 5}{\log 3} = 1.46\cdots\cdots \tag{2.51}$$

对于逾渗（Percolation）问题，也类似于生长现象，随着

格子尺度$l$的增加，质量或点数$N$也增加。

## §10 自仿射的分维

我们前面讨论了自相似的分形（如海岸线），它们的特点是，图2.2中若把横坐标$r$放大$\lambda$倍，则纵坐标$f(\lambda r)$也是$f(r)$的$\lambda$倍，即$f(\lambda r)=\lambda f(r)$。但是对于布朗运动的轨迹情况就不同了，见图2.11。由两个点的增量

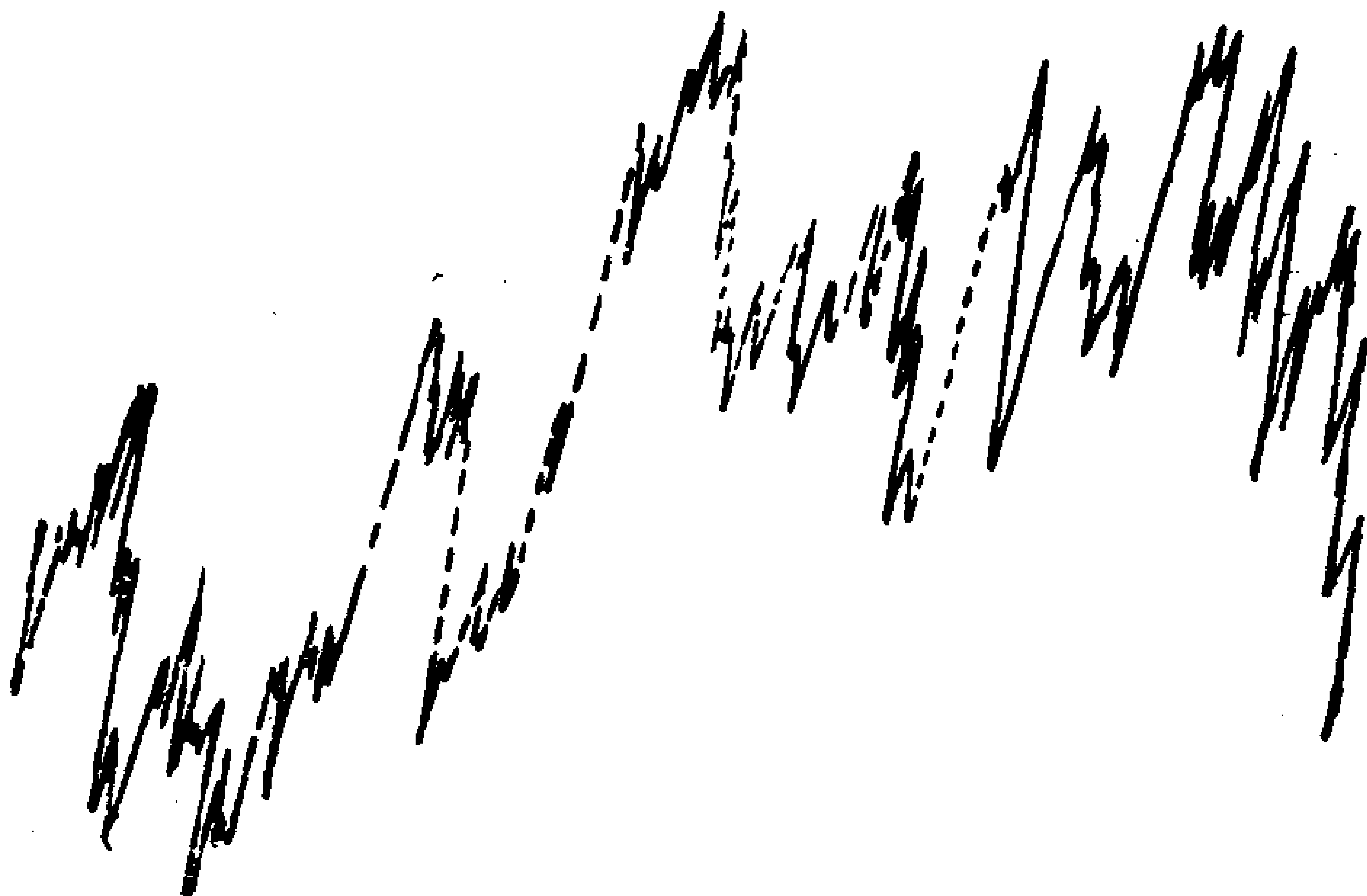


图2.11 布朗运动轨迹$v(t)$是时间$t$的函数

$$\Delta v = v(t_2) - v(t_1) \tag{2.52}$$

就代表布朗运动的噪声（参看第五章），一般$\Delta v$和时间差$\Delta t = t_2 - t_1$之间的关系为

$$\Delta v \propto \Delta t^{\alpha} \tag{2.53}$$

其中$0<\alpha<1$叫标度指数，对通常的布朗运动，$\alpha=\frac{1}{2}$，它表示方差和$\sqrt{t}$成正比。

若把$\Delta v$看成是因变量，$\Delta t$看成是自变量，那么这两个不同方向应有不同的放大倍数。例如$t$用$\lambda t$代替，则$v$就应该用$\lambda^{\alpha}v$代替。对于布朗运动$\left(\alpha=\frac{1}{2}\right)$，若时间步长扩大四倍，形状必须扩大二倍

才能不变。这种不同方向的标度不同的非均匀标度就叫自仿射。

图2.12是$x$和$y$方向聚合增长的方式不同：每次在$\pm x$方向上各加一个质点球，而在$\pm y$方向上各加两个质点球，共七个质点

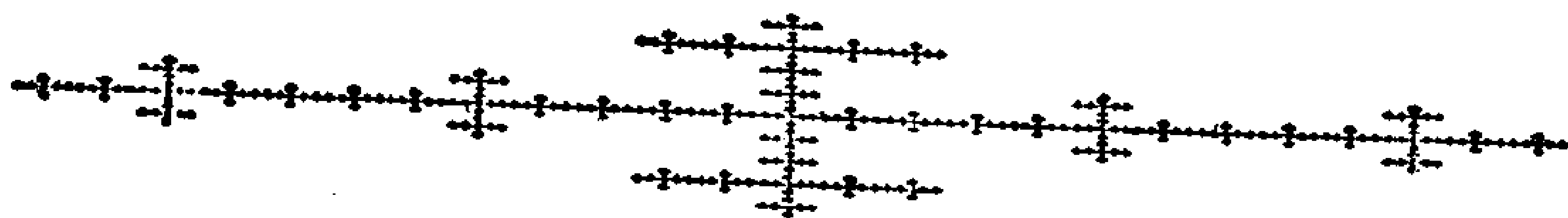


图2.12 二维自仿射分形聚合增长

球。此时大尺度的结构就不单是小尺度的放大。在$x$方向上要扩大3倍，$y$方向上扩大5倍才能成为大尺度的结构。

据(2.50)式有两个维数

$$D_1=\frac{\log 7}{\log 3}=1.77,\ D_2=\frac{\log 7}{\log 5}=1.21 \qquad (2.54)$$

## §11 零 集

要扩大自仿射分形的应用，我们要引进零集的概念。在欧几里德形状中，若将其与一个平面相交，则其维数要减少一。例如三维固体球用一个平面相截就成了一个二维的圆面积。这个面积若与另一平面相交就是一维的线段，这个线段再与另一平面相交就是0维的点。类似平面上的$1<D<2$的分维曲线与一直线相交成维数为$D-1$的点集。我们可以通过选择交线的方向消去一个坐标，就有可能把自仿射的曲线化减为自相似的点集。例如图2.11的布朗运动的轨迹$v(t)$与$t$轴相交的点集合$v(t)=0$，就是布朗运动的零集合。它是拓扑维为零，而按(2.39)式分数维为$D_0=1-\alpha$。这样虽然布朗运动的轨迹是自仿射的，但是其零集合就是自相似的。反过来，自仿射的布朗运动轨迹的分数维就是

$$\begin{aligned}D&=D_0+1=1-\alpha+1=2-\alpha\\&=1.5\end{aligned} \qquad (2.55)$$

我们可以将布朗运动的轨迹推广到地形的高度$z$，那么

$$\Delta z \propto \Delta r^{\alpha} \tag{2.56}$$

其中$\Delta r^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$

虽然地形高度是自仿射的，但是可利用零集的概念导得其分数维。

$$D = 3 - \alpha = D_0 + 1 \tag{2.57}$$

此时地形$z(x, y)$与水平面的交集是它的零集，其分数维$D_0 = 2 - \alpha$，它很象海岸线，因为$x$和$y$是等价的，所以地形零集形成的海岸线是自相似的。

零集的概念推广到温度分布$T(x, y, z)$和密度分布$\rho(x, y, z)$等，此时零集为

$$T(x, y, z) = \text{const}, \quad \rho(x, y, z) = \text{const} \tag{2.58}$$

它们是自相似的，其分维$D_0 = 3 - \alpha$，从而温度分布的云形的维数是

$$D = 4 - \alpha \tag{2.59}$$

功率谱指数$\beta$，标度指数$\alpha$以及维数$D$这三者同样等价地表征了$d$维（$d$个变数）分数维布朗函数的特征，它们之间的关系由(2.39)式和(2.38)式给出

$$D = d + 1 - \alpha = d + 1 - \frac{\beta - 1}{2} = d + \frac{3 - \beta}{2} \tag{2.60}$$

式中各量的范围是

$$d < D < d + 1, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 1 < \beta < 3 \tag{2.61}$$

总之，分数维布朗函数$v(t)$对于许多标度过程和形状提供了一个很好的模式。当一个变数($d = 1$)为函数时，分数维布朗函数是噪声的很好的数学模式。当二个变数($d = 2$)时，为地形和随机表面提供分形模型。当$d = 3$时产生分形云。

(2.60)式对$d = 1, 2, 3$分别有

$$\beta = 5 - 2D(d = 1), \quad \beta = 7 - 2D(d = 2),$$
$$\beta = 9 - 2D(d = 3) \tag{2.62}$$

## §12 谱维数

大家知道在$d$维均匀介质中在低频端的声子（晶体点阵上振动能的量子）的谱和$\omega$的关系为

$$S(\omega)\sim\omega^{d-1} \tag{2.63}$$

但是在分形介质中，此时$S(\omega)$不能表示成$S(\omega)\sim\omega^{D-1}$（其中$D$是分数维)而只能用另一个指数$D_s$来代替（2.63）式中的$d$，即

$$S(\omega)\sim\omega^{D_s-1} \tag{2.64}$$

式中的$D_s$反映了动力学的性质，称为谱指数。

有了谱维数$D_s$，均匀介质中低频比热和温度的关系$T^d$就变成分形介质中的$T^{D_s}$。就波传播而言，其扩散性质仍要求谱维数。例如均匀介质中的随机游动（请参看第五章），游动距离的平均方差

$$\overline{x^2(t)}\sim t \tag{2.65}$$

而在分形介质中，（2.65）式就变成

$$\overline{x^2(t)}\sim t^{D_s/D} \tag{2.66}$$

若在（2.65）式中的比例系数为扩散系数$K(x)$

$$K(x)\propto x^{-\theta} \tag{2.67}$$

即

$$\overline{x^2(t)}=K(x)\cdot t \tag{2.68}$$

将（2.67）式代入（2.68）式有

$$x\propto t^{\frac{1}{2+\theta}}$$

或 $$\overline{x^2}\propto t^{\frac{2}{2+\theta}} \tag{2.69}$$

对均匀介质$\theta=0$。

将（2.69）式与（2.66）式比较得到

$$D_s = \frac{2D}{2+\theta} \tag{2.70}$$

亚历山大-俄巴奇猜想，当$d \geqslant 2$时$D_s = \frac{4}{3}$。

# 第三章　浑沌吸引子的分形

## §1　浑 沌 模 型

出现浑沌的最典型的模型是生态学中的May模型

$$x_{n+1}=\mu x_n(1-x_n) \tag{3.1}$$

它们还可以有另外两种形式

$$y_{n+1}=1-\lambda y_n^2 \tag{3.2}$$

和

$$z_{n+1}=c-z_n^2 \tag{3.3}$$

其中

$$\mu=\sqrt{1+4\lambda}+1,\quad c=\frac{1}{4}\mu(\mu-2)$$
$$x=\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{\mu}y\qquad z=\mu\left(x-\frac{1}{2}\right) \tag{3.4}$$

(3.1) 到 (3.3) 式中$x_n$，$y_n$或$z_n$代表年代$n$时的群体数。$\mu$，$\lambda$和$c$是控制参数。

以 (3.1) 式为例，当$x\in[0,1]$，$\mu\in[0,4]$时，参数$\mu$变化时，长时间$x_n$演化的形态可以有好多种。

$0<\mu\leqslant 1=\mu_1$时，$x_n\longrightarrow 0$

$1<\mu\leqslant 3=\mu_2$时，$x_n\longrightarrow 1-\dfrac{1}{\mu}$

$3<\mu\leqslant 3.449=\mu_3$时，$x_n\longrightarrow$周期2，即在两个值上跳动

$3.449<\mu\leqslant 3.545=\mu_4$，$x_n\longrightarrow$周期4，即在四个值上来回跳动

⋮

$\mu\longrightarrow 3.57=\mu_\infty$　$x_n\longrightarrow$浑沌吸引子

图3.1显示了状态$x_n$随参数$\mu$的变化。参数在$\mu_1$，$\mu_2$，$\mu_3$，$\mu_4$，…处状态发生分岔，原有的状态不稳定，而产生新的状态，它们分别

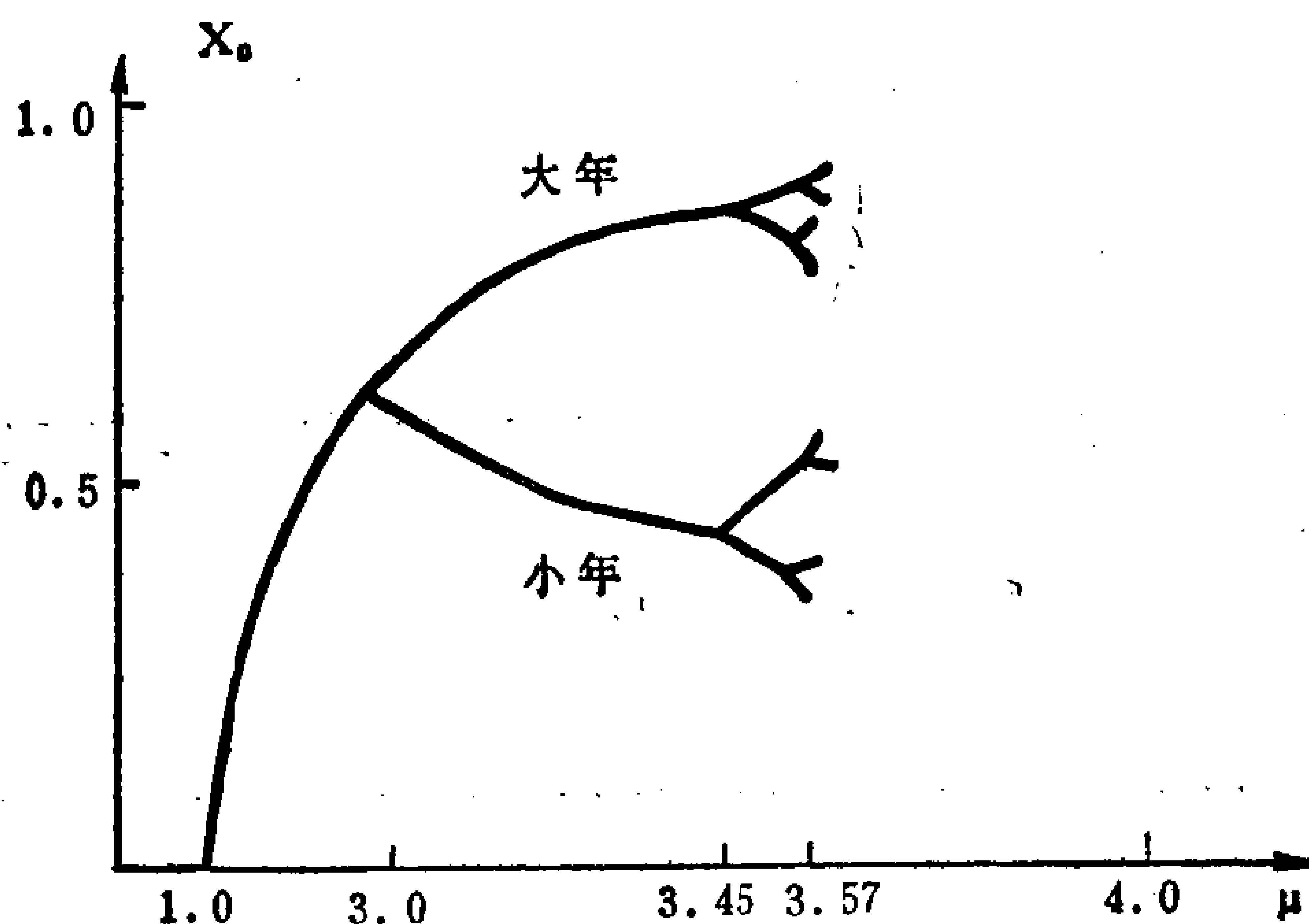



图3.1　(3.1) 式状态$x_n$随$\mu$的变化

叫周期1、周期2、周期4、…吸引子。这种过程叫周期倍分岔。直到$\mu_\infty=3.57$时，周期变为$2^\infty$，因而是浑沌吸引子。

应该说明，浑沌是由确定性的系统（3.1）一步一步算出来的，甚至于浑沌也可以用一个解析表达式表示出来。例如（3.1）式中$\mu=4$时，

$$x_{n+1}=4x_n(1-x_n)$$

的一个解就是　$x_n=\sin^2(2^n\pi\theta)$。将它代入上式有

$$\sin^2(2^{n+1}\pi\theta)=\sin^2[2\cdot(2^n\pi\theta)]=[2\sin(2^n\pi\theta)\cos(2^n\pi\theta)]^2$$
$$=4x_n(1-x_n)$$

显然，若$\theta$是无理数，那么解就是非周期的。

## §2　自相似性及标度律

浑沌模型（3.1）式发现了好多自相似性的规律。

1.　分岔点$\mu_1$，$\mu_2$，$\mu_3$…之间的关系

随着$\mu$向前增加，后面相邻两个分岔点的$\mu$值之差是前面相邻两个分岔点$\mu$值之差的4.669…倍，即

$$\frac{\mu_n-\mu_{n-1}}{\mu_{n+1}-\mu_n}=\delta=4.669 \qquad (3.5)$$

其中$\delta$是一个无理数，叫Feigenbaum常数

2. 周期倍分岔的状态值$x$之间的关系

设$d_n$和$d_{n+1}$分别为周期$2^n$和$2^{n+1}$的状态值离$x=\frac{1}{2}$的距离，则

$$\frac{d_n}{d_{n+1}}=\alpha=2.5 \qquad (3.6)$$

且周期 4 的两个周期 2 状态之间的距离$d_2$和$d_2'$也有类似关系，见图3.3。

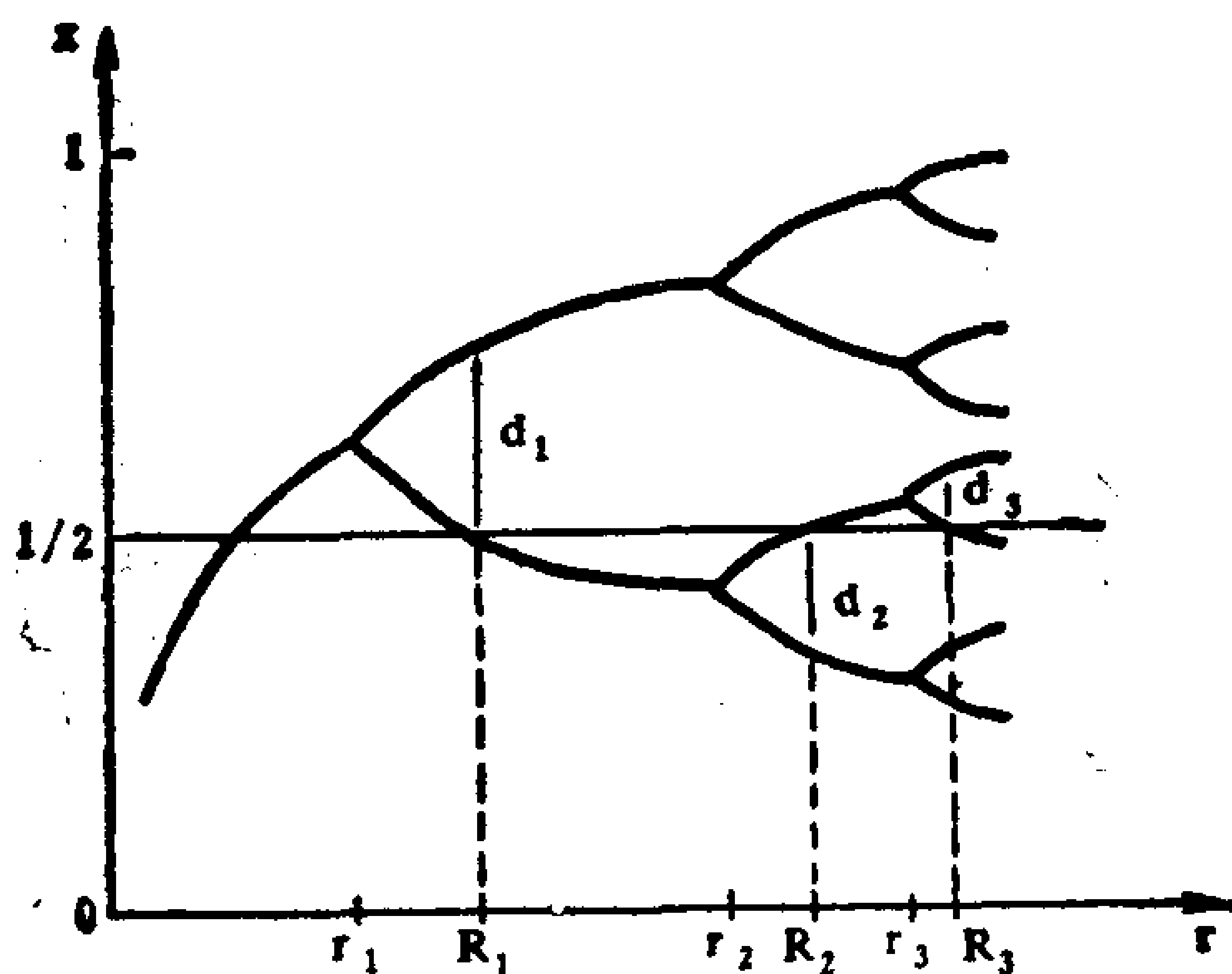



图3.2 Feigenbaum常数示意图

$$\frac{d_n}{d_n'}=\alpha \qquad (3.7)$$

3. $f(x)$和$f(f(x))$图之间的关系

大家知道$f(x)$的不动点是周期 1，而$f(f(x))\equiv f^2$的不动点，除去$f(x)$的两个不动点外，是周期 2。图 3.3是$f(x)$和$f(f(x))$的图象。

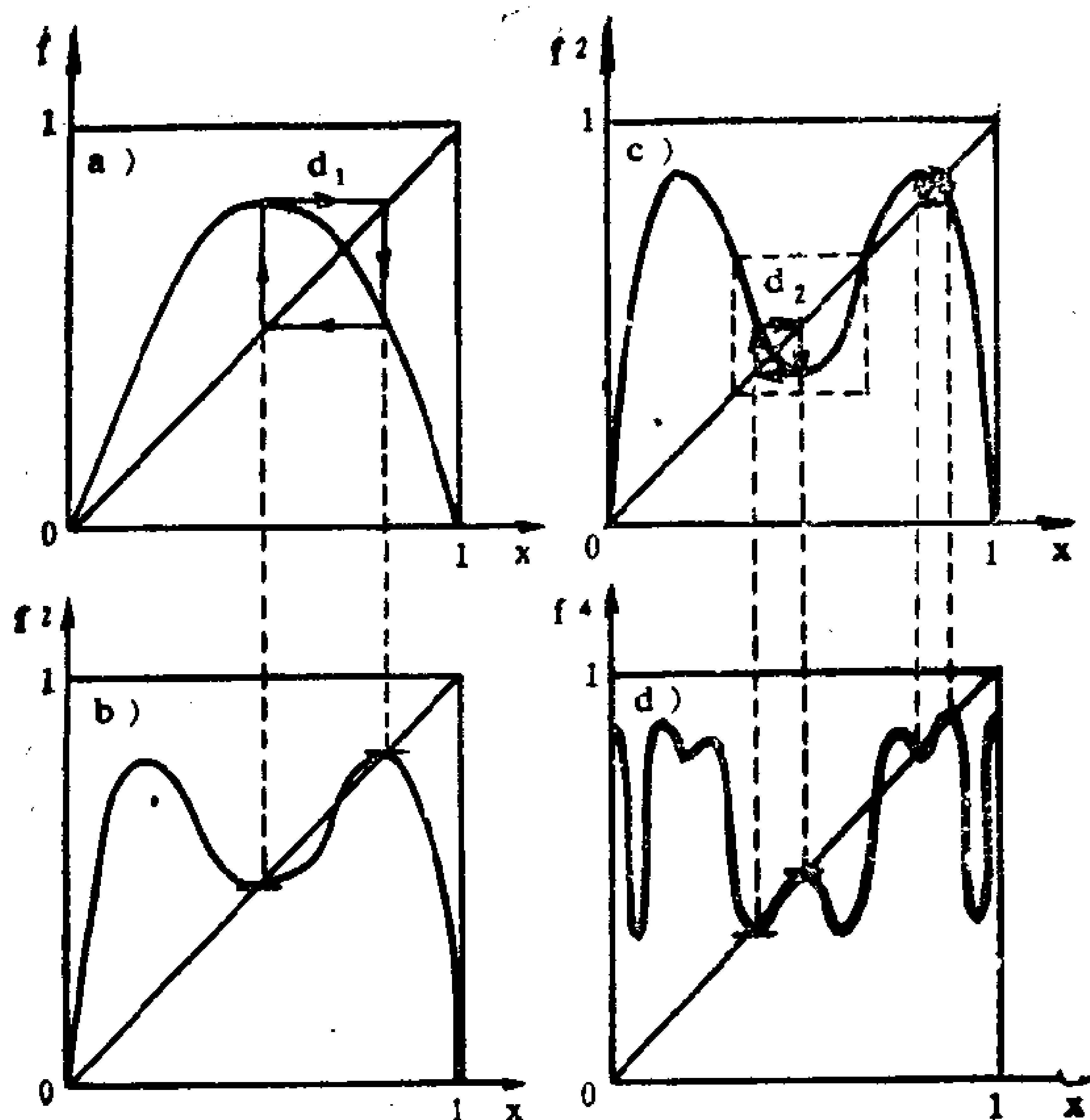



图3.3

$f(x)$ (a) 、$f(f(x))$ (b) 、$f^2(x)$ (c) 、$f^4(x)$ (d) 图象

在$f(x)$的一段，我们将其框在边长设为1的正方形内；在$f(f(x))$的一段，我们将其框在边长为$\frac{1}{\alpha}$的小正方形内。从这两个方框看出，将小方框内的$f(f(x))$放大$\alpha$倍并倒过来就和$f(x)$的方框相同，并用$g(x)$表示$n$很大的$f^n$的极限，$g(g(x))$表示周期$2n$的$f^{2n}$的极限，这两者之间关系可以表示为

$$g(x) = -\alpha g\left(g\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right) \tag{3.8}$$

(3.8)式右端括号内的$\frac{x}{\alpha}$表示其尺度是$x$的$\frac{1}{\alpha}$倍，负号表示$x$从$x=\frac{1}{2}$向右算起，而现在从$x=\frac{1}{2}$向左。(3.8)式右边的$\alpha$即表示放大$\alpha$倍，负号表示其图象倒过来。

（3.8）式是自相似的泛函方程。

4. 周期$n$的函数$f^n$和 $2n$ 的函数 $f^{2n}$ 的斜率可以看成是相等的，特别在分岔点处两者的斜率均等于$-1$

5. $\mu_{n+1}$处的周期是$\mu_n$处周期的 2 倍，即

$$n(\mu_{n+1})=2n(\mu_n) \tag{3.9}$$

（3.8）式，(3.9)式以及第（4）点可以看成是浑沌典型(3.1)的自相似关系和标度律。

## §3 Feigenbaum常数和分维

我们现在就利用浑沌的自相似关系和标度律来导出 Feigenbaum 常数和标度律，我们先用浑沌模型的（3.2）式的形式。

根据（3.2），图期 1 的不动点由

$$y=1-\lambda y^2 \tag{3.10}$$

解出为

$$y=\frac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda} \tag{3.11}$$

它的斜率为

$$f'(y)=-2\lambda y=1-\sqrt{1+4\lambda} \tag{3.12}$$

周期 2 的不动点由

$$y=f(f(y))=1-\lambda[1-\lambda y^2]^2 \tag{3.13}$$

解出为

$$y_1=\frac{1+\sqrt{4\lambda-3}}{2\lambda},\quad y_2=\frac{1-\sqrt{4\lambda-3}}{2\lambda} \tag{3.14}$$

它的斜率

$$f^{2\prime}(y)=4(1-\lambda) \tag{3.15}$$

我们利用 §2 标度律的第（4）点，$f(y)$ 和 $f^2(y)$ 在周期倍分岔的累积点 $\lambda_\infty$处相等，由（3.12）和（3.15）式得

$$4(1-\lambda_\infty)=1-\sqrt{1+4\lambda_\infty} \tag{3.16}$$

由（3.16）式解出

$$\lambda_{\infty}=\frac{7+\sqrt{17}}{8}\doteq 1.39 \tag{3.17}$$

实际的$\lambda_{\infty}$数值是多少呢？我们只要将$\mu_{\infty}=3.57$代入（3.4）式，求出

$$\lambda_{\infty}=1.4011 \tag{3.18}$$

（3.18）和（3.17）式比较，两者是很接近的。

同样，将$f(y)$ 和 $f^2(y)$ 两者斜率相等分别用在分岔点 $\lambda$ 和 $\lambda'$ 上，有

$$4(1-\lambda')=1-\sqrt{1+4\lambda} \tag{3.19}$$

将上式对$\lambda'$求导得

$$-4=-\frac{1}{2}(1+4\lambda)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\lambda'}\right)_{\lambda_{\infty}}$$

因而Feigenbaum常数

$$\delta=\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\lambda'}\right)_{\lambda_{\infty}}=2\sqrt{1+4\lambda_{\infty}}=5.12 \tag{3.20}$$

它和实际数值4.669相差不多。

因为周期倍分岔的周期$n$随着参数$\lambda$的变化可以表示为

$$n(\lambda)\sim(\lambda_{\infty}-\lambda_n)^{-\tau} \tag{3.21}$$

又设

$$\lambda_{\infty}-\lambda_n\sim\delta^{-n} \tag{3.22}$$

由标度律（3.9）式，有

$$\frac{1}{2}=\frac{n(\lambda_n)}{n(\lambda_{n+1})}=\frac{\delta^{n\tau}}{\delta^{(n+1)\tau}}=\delta^{-\tau} \tag{3.23}$$

由此求得

$$\tau=\frac{\ln 2}{\ln\delta}=0.4498 \tag{3.24}$$

现在利用泛函关系（3.8）式，设函数$g(x)$的形式为

$$g(x)=1-\lambda_{\infty}x^2 \tag{3.25}$$

将（3.25）式代入（3.8）式得

$$1-\lambda_\infty x^2=-\alpha\left\{1-\lambda_\infty\left[1-\lambda_\infty\left(-\frac{x}{\alpha}\right)^2\right]^2\right\}$$

$$=-\alpha(1-\lambda_\infty)-\left(\frac{2\lambda_\infty^2}{\alpha}\right)x^2+O(x^4)$$

比较两边$x$的零次幂和二次幂的系数

$$\begin{cases}\alpha(1-\lambda_\infty)=-1\\ \lambda_\infty=\dfrac{2\lambda_\infty^2}{\alpha}\end{cases} \tag{3.26}$$

由此解得

$$\lambda_\infty=\frac{\alpha}{2}, \tag{3.27}$$

$$\alpha^2-2\alpha-2=0 \tag{3.28}$$

由（3.28）式解得另一Feigenbaum常数为

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{12}\right)=1+\sqrt{3}=2.73 \tag{3.29}$$

这个数值和实际值2.5相差不多。

将（3.26）式的第一式两边乘以$\lambda_\infty$得

$$\lambda_\infty=-\alpha(\lambda_\infty-\lambda_\infty^2) \tag{3.30}$$

令

$$\lambda_n=\lambda_\infty-\varepsilon\delta,\quad \lambda_{n+1}=\lambda_\infty-\varepsilon \tag{3.31}$$

将（3.31）式代入（3.30）式得

$$\lambda_\infty+\varepsilon\delta=-\alpha(\lambda_{n+1}+\varepsilon)(1-\lambda_{n+1}-\varepsilon)$$

$$=-\alpha(\lambda_{n+1}+\varepsilon-\lambda_{n+1}^2-2\lambda_{n+1}\varepsilon-\varepsilon^2)$$

上式中令$n\to\infty$，比较两边$\varepsilon$的系数得到

$$\delta=2\alpha\lambda_\infty-\alpha=\alpha(2\lambda_\infty-1)=\alpha^2-\alpha$$

$$=4.72 \tag{3.32}$$

它和实际数值4.669相差不多。

至于维数，我们利用（2.46）式，设周期2的两个$x$之间距

离为1，则周期4的两个周期2之间的距离就分别为

$$l_1=\frac{1}{\alpha},\ l_2=\frac{1}{\alpha^2} \tag{3.33}$$

（3.33）式代入（2.46）式得

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^D+\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^D=1 \tag{3.34}$$

这是$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^D$的二次代数方程，求得

$$D=\frac{\log(\sqrt{5}+1)/2}{\log\alpha}=0.524 \tag{3.35}$$

这一节的结果说明，自相似的标度律是反映复杂现象结构的规律，由它可以得到许多有兴趣的结果。

## §4 浑沌和相变之间的相似性

上一章我们讨论了相变的自相似律和重整化群思想，对照一下本章的浑沌自相似的标度律，两者非常相似（见表3.1）。相

表3.1 列出相变和浑沌之间关系对照

| 相变 | 浑沌 |
|---|---|
| 四个自旋结合成一群 | 周期倍分岔的自相似性 |
| 参数$T-T_c$ | $\mu-\mu_\infty$ |
| $T-T_c\to\lambda(T-T_c)$ | $\mu-\mu_\infty\to\delta(\mu-\mu_\infty)$ |
| 重整化群变换$T=R(T)$ | 周期倍分岔变换$\mu=R(\mu)$ |
| 变换不动点$T_c$ | 周期倍分岔累积点$\mu_\infty$ |
| 线性化$R(T)=R(T_c)+\lambda(T-T_c)$ | $R(\mu)=R(\mu_\infty)+\delta(\mu-\mu_\infty)$ |
| $\xi(T')=\frac{1}{2}\xi(T)$ | $n(\mu_n)=\frac{1}{2}n(\mu_{n+1})$ |
| 临界指数 $\nu=\frac{\ln 2}{\ln\lambda}$ | $\tau=\frac{\ln 2}{\ln\delta}$ |
| $\xi(T)\sim(T-T_c)^{-\nu}$ | $n(\mu)\sim(\mu-\mu_\infty)^{-\tau}$ |

变和浑沌之间的相似之处有其物理的本质联系，它们都是有大量粒子（大大小小尺度）的复杂现象，更有可能使我们能用重整化群方法来研究浑沌。

最后我们还要指出，重整化群变换

$$T=R(T) \tag{3.36}$$

有两个吸引子：

$$T=0 \text{ 和 } T=\infty \tag{3.37}$$

它们分别相应于完全的有序和完全的无序。而在临界温度$T_c$上，不管用什么尺子去量，其关联长度都是无穷大，其相变性质并不改变，所以说$T_c$是（3.36）的不动点

$$T_c=R(T_c) \tag{3.38}$$

同时由（2.30）式看出$T-T_c$愈大，$\xi$变小，因而$T_c$不是稳定的不动点。$T_c$又不能是完全不稳定的不动点，否则所有参数在重整化变换下不断放大，系统的个性表现得愈来愈突出。因此临界点$T_c$只能是鞍点类的不动点，它可看成是上述两个吸引盆的边界，就是下节要介绍的复映射的Julia集。

## §5 复映射和Julia集

浑沌模型（3.1）是在实数范围内的迭代映射，现在考虑$z$是复数，则如下映射

$$z_{n+1}=z_n^2+c \tag{3.39}$$

就为一复映射，其中$c$也是复数。

若$c=c_r+ic_i$，$z=x+iy$，则(3.39)可以化为一个二维映射

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n{}^2-y_n{}^2+c_r \\ y_{n+1}=2x_ny_n+c_i \end{cases} \tag{3.40}$$

在相平面（$x$，$y$）上，映射（3.40）的动力形态取决于控制参数$c$。对于某个固定的$c$值，迭代结果要么$z_n$在相平面上趋向无穷大，要么$z_n$被限制在相平面某个有界的区域内，那么该区域的边界就

叫Jnlia集。

例如取$c=0+0i$，那么如果$|z_0|<1$，则在复$z$平面上迭代结果$z_n\to 0$，如果$|z_0|>1$，则在复$z$平面上迭代结果$|z_n|\to\infty$。如果$|z_0|=1$，则$|z_n|=1$，因此两个吸引盆（$z=0$和$|z|=\infty$）之间的边界，即单位圆$|z|=1$，就是Jnlia集，见图3.4(a)。

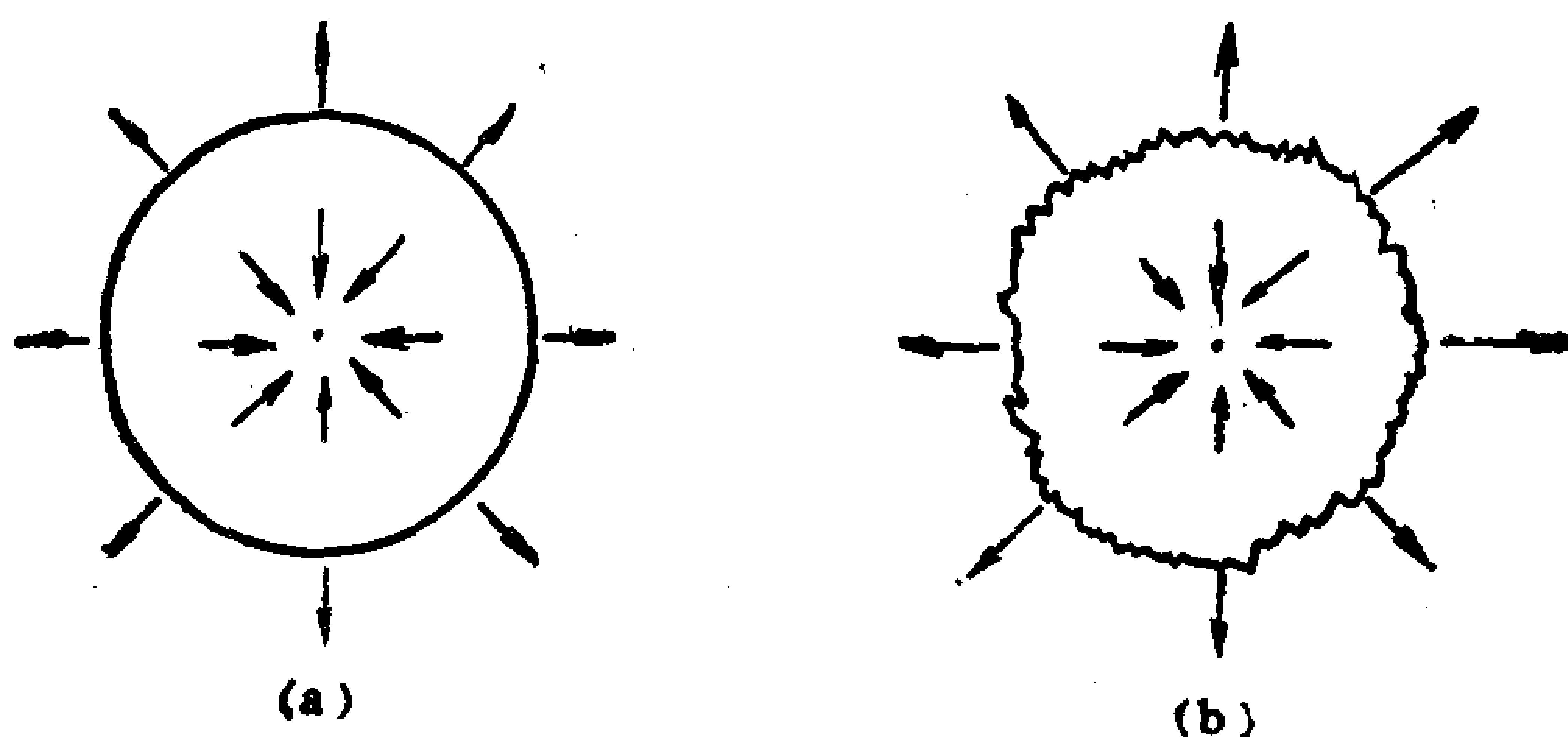



图3.4 两个吸引盆的边界
(a) $c=0$ (b) $c\neq 0$

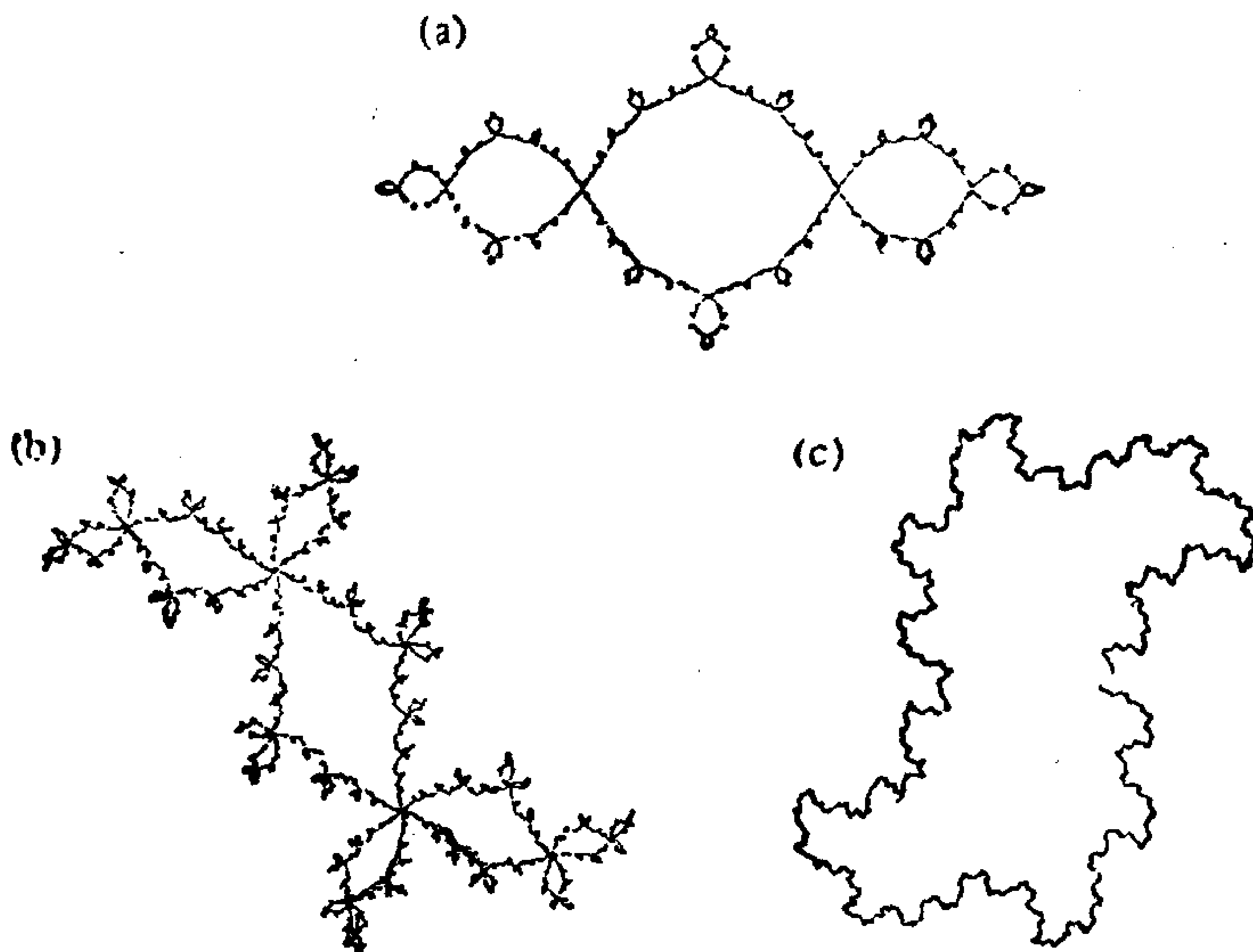



图3.5 Julia集
(a) $c=-1$ (b) $c=-0.1+0.8i$ (c) $c=0.3-0.4i$

对于 $c\neq 0$，Julia 集的形状则是多种多样的分维结构，见图3.4(b)。图3.5(a)，(b)，(c)分别是 $c=-1$，$c=-0.1+0.8i$ 和 $c=0.3-0.4i$ 时的Julia集。

Julia集的实际例子是求解三次方程

$$f(z)=z^3-1=0 \tag{3.41}$$

三个根的Newton迭代法：

$$z_{n+1}=z_n-\frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \quad 或 \quad z_{n+1}=z_n-\frac{(z_n{}^3-1)}{3z_n^2} \tag{3.42}$$

(3.41) 式的三个根是 1（相当于单位圆上的三点钟），$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$（相当于单位圆上的十一点钟）和 $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$(相当于单位



(a)



(b)



(c)

图3.6　无穷复杂的边界

(a) 用牛顿法求－1的立方根时平面被分成三个区域，图中所有白点被吸引到最大白色区域中的一个根所有黑点被吸引到另外两个根中一个 (b)(c) 是 (d) 的局部放大

圆上的七点钟）。（3.42）式和复映射（3.39）式一样是一个动力系统，（3.39）式有两个吸引子(一个有界，一个无穷)，(3.42)式有三个吸引子。从复平面上任何地方的初值$z_0$开始迭代，最终应该滑到其中的一个吸引子。我们可能会想，三个吸引子的吸引盆的边界应该是简单的。计算机在复平面上逐点扫描的结果并不是这样。导致一个根的点用白色标记，导致其它两个根的点用黑色标记。结果发现两种颜色之间的边界永远不能清楚地形成。没有一个点是两种颜色的边界。三个扇形区域的边界具有一种特别的性质，即上面每一个点都隔开所有三个区域。图3.6(a)就反映这种复杂的边界。而且把3.6(a)的图形放大，又会形成自相似的结构，如图3.6(b)，(c)。所以通常认为Julia集是分数维结构，并且在这个集上迭代的运动是浑沌运动。可以认为这种复杂的边界是现实世界物理过程的一种反映。

刚才Julia集是在复数平面（$x$，$y$）上考虑的。对于复映射（3.39）式也可以在复参数平面（$c_r$，$c_i$）上进行，此时不是取定$c$，而是取定$z_0$（例如$z_0=0$），那么我们就得到如下轨道

$$0,\ c,\ c^2+c,\ (c^2+c)^2+c,[(c^2+c)^2+c]^2+c,\cdots\cdots \quad (3.43)$$

那么使得上述轨道$|z_n|$有界的点集（$c_r$，$c_i$）就是Mandolbrot集，理论上很易说明只要上述轨道上任何一点的复数模大于2，则$|z_n|$就趋向无穷，那么该点集（$c_r$,$c_i$)就不属于Mandelbrot集。事实上，若$|z|\geqslant|c|>2$的任何一点$z$，则

$$\begin{aligned}|z^2+c|&\geqslant|z|^2-|c|\geqslant|z|^2-|z|\\&=|z|(|z|-1)>|z|\end{aligned} \quad (3.44)$$

图3.7是典型的在复平面（$c_r$，$c_i$）上的Mandelbrot集。图中标出的数字是代表周期的数目。

从图2.7上我们看出几点：

（1）$M$集中最大的心脏线区代表周期1，在$c=-0.75$切于心脏线的是周期2的圆，其中心在$c=-1$，到$c_2=-1.25$又一个小圆相切于周期2的大圆。故$c$是实参数时，图3.7的$M$集就显示

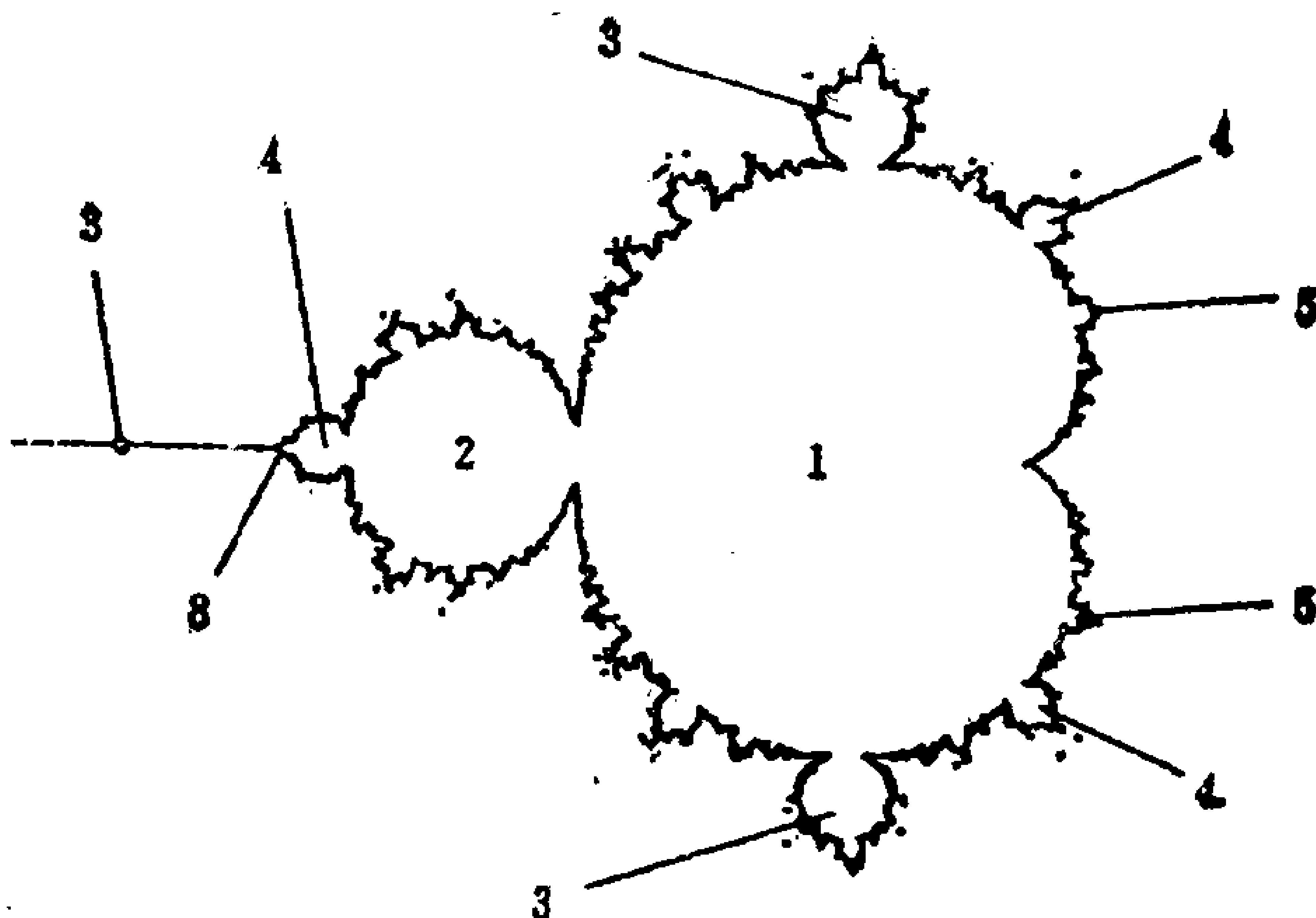



图3.7 Mandelbrot集上球状的周期

出和周期倍分岔浑沌之间的关系。而 $c=-1.75$ 的小圆相应于浑沌区的周期3窗口，周期倍分岔的累积点 $c_\infty \doteq -1.40$。

（2）在复平面上看，分岔就相当于$M$集上的发芽状态，例如心脏线边缘上发芽出的两个周期3，两个周期4和两个周期5。

Mandelbrot 是首先从复$c$平面（$c_r$，$c_i$）上来区分复$z$平面（$x$, $y$）上Julia集形状的。他发现若$c$值选在$M$集内，则相应的Julia集是连通的，$c$如不在$M$集内，则相应的Julia集是不连通的。特别在$M$集边界上的$c$，决定出的Julia集变化就非常剧烈，这就是为什么吸引域的边界和实际物理过程中的相变相联系的原因。

关于Julia集的分维，至今知道得很少，当 $|c| \ll 1$，Ruelle得到一个公式

$$D=1+\frac{|c|^2}{4\log 2}+\text{高阶次} \tag{3.45}$$

## §6 Yorke公式

从浑沌意义上知道，浑沌吸引子是整体上的稳定性和局部不

稳定相结合的结果，是伸长和折迭的产物。因此局部不稳定或伸长，使$n$维相空间中至少有一个 Lyapunov 特征指数为正。例如在三维相空间中，三个Lyapunov指数的大小排列为

$$LE_1 \geqslant LE_2 \geqslant LE_3 \tag{3.46}$$

其中

$$LE_1 > 0 \tag{3.47}$$

代表浑沌吸引子。且$LE_2 = 0$

Lyapunov特征指数和分维的关系，Kaplam和Yorke猜想为

$$D = j + \frac{\sum_{i=1}^{j} LE_i}{|LE_{j+1}|} \tag{3.48}$$

其中$j$是使$\sum_{i=1}^{j} LE_i \geqslant 0$的最大整数，即使得

$$\sum_{i=1}^{j} LE_i \geqslant 0 \text{ 且} \sum_{i=1}^{j+1} LE_i < 0 \tag{3.49}$$

时$j$的数值

对浑沌吸引子（例如三维）整体上稳定或折迭性质使。

$$LE_1 + LE_2 + LE_3 < 0 \tag{3.50}$$

下面我们来证明Yorke公式（3.49）。

拿三维相空间来讲，设想一个单位立方体，经过很小的时刻$\tau$以后，体积缩小变为

$$\begin{aligned} V(\tau) &= 1 \cdot e^{(LE_1 + LE_2 + LE_3)\tau} \\ &= e^{(LE_1 + LE_3)\tau} \end{aligned} \tag{3.51}$$

而每边长缩小为

$$r = e^{LE_3 \cdot \tau} \tag{3.52}$$

我们就用边长为$r$的小立方块去量$V(\tau)$，共量得数目

$$N = \frac{e^{(LE_1 + LE_3)\cdot\tau}}{(e^{LE_3\cdot\tau})^3} \tag{3.53}$$

按分维定义（2.9）式

$$D=\frac{\log N}{\log\frac{1}{r}}=\frac{(LE_1+LE_3-3LE_3)\cdot\tau}{-LE_3\cdot\tau}$$

$$=2-\frac{LE_1}{LE_3}=2+\frac{LE_1}{|LE_3|} \qquad (3.54)$$

（3.54）式就是 Yorke 公式（3.49）中$j=2$的情况。这就验证了Yorke公式

Yorke公式对三维相空间的另外三种吸引子也是成立的。例如

定常吸引子，其Lyapunov指数为

$$LE_1<0,\ LE_2<0,\ LE_3<0 \qquad (3.55)$$

因而$j=0$，故$D=0$

对周期吸引子，其Lyapunov指数为

$$LE_1=0,\ LE_2<0,\ LE_3<0 \qquad (3.56)$$

因而$j=1$，故$D=1$

对二维环面上的拟周期吸引子，其 Lyapunov 指数为

$$LE_1=0,\ LE_2=0,\ LE_3<0 \qquad (3.57)$$

因而$j=2$，故$D=2$。

例如对于Lorenz系统

$$\begin{cases}\dot{x}=-\sigma x+\sigma y\\ \dot{y}=rx-y-xz\\ \dot{z}=xy-bz\end{cases} \qquad (\sigma=10,\ b=8/3,\ r=30)$$

时$LE_1=1$，$LE_2=0$，$LE_3=-14.5$，那么由（3.48）算得

$$D=2+\frac{1}{|-14.5|}\doteq 2.07$$

## §7 浑沌吸引子的信息

在第四章中我们将看到信息和分维有着密切的关系。为此，我

们对浑沌模型（3.1）式来讨论其信息是如何变化的。为了简单起见，设

$$x=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}y\right) \qquad \sigma\leqslant y\leqslant 1 \tag{3.58}$$

将（3.58）式代入$\mu=4$的（3.1）式中，则有

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}y_{n+1}\right)=\sin^2\left[2\left(\frac{\pi}{2}y_n\right)\right]$$

因而映射（3.1）式就可以化成帐篷映射

$$y_{n+1}=f(y_n)=\begin{cases}2y_n & 0\leqslant y_n\leqslant 0.5\\ 2(1-y_n) & 0.5\leqslant y_n\leqslant 1\end{cases} \tag{3.59}$$

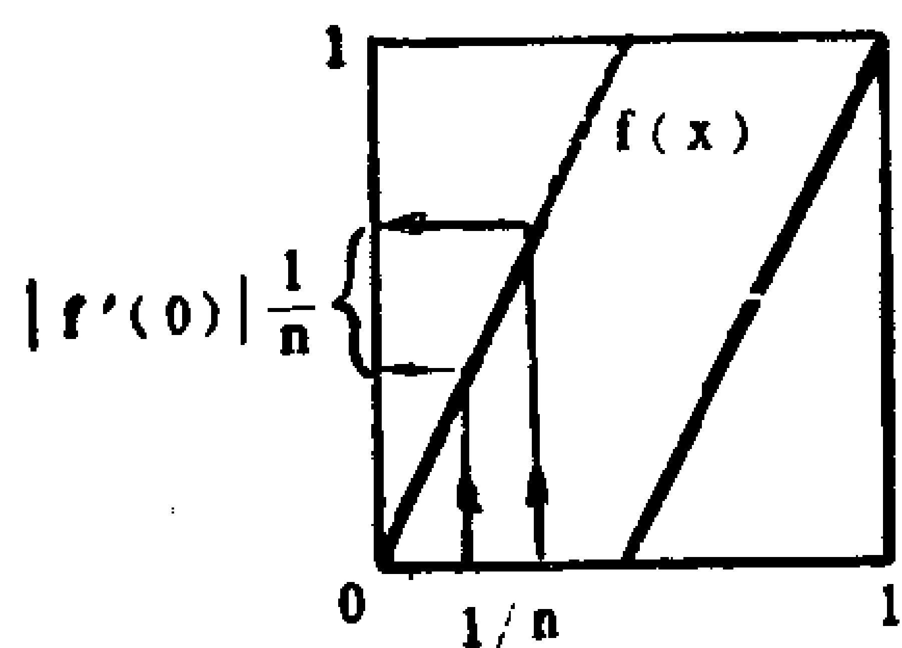


图3.8 帐篷映射

其图象如图3.8。由（3.59)式可以看出，$f'(y_n)=2$，因而所有周期倍分岔吸引子都是不稳定的，只存在浑沌吸引子。

据Shannon信息定义，一个事件发生后所获得的信息量为

$$\mathrm{I}=-\sum_i p_i\log p_i \tag{3.60}$$

其中 $p_i$ 是每一个可能结果的概率。因此结果愈确定，其信息量愈小。

在图 3.9 的横坐标上，将［0，1］区间分成$n$等分，某个点出现在［0，1］区间上的概率是 $\frac{1}{n}$，这也可以叫作分辨率，因而分辨率愈高，信息量愈大。故按（3.60）式其信息量为

$$\mathrm{I}_0=-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\log\frac{1}{n} \tag{3.61}$$

迭代一次以后，间隔就变成$f'(y)\cdot\frac{1}{n}=\frac{2}{n}$，即分辨率下降，因

而信息量损失，即

$$I_1=-\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\frac{2}{n}\log\frac{2}{n} \tag{3.62}$$

将（3.62）式减去（3.61）式，即可得到信息量的变化为

$$\begin{aligned}\Delta I &= I_1-I_0\\ &=-\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\frac{2}{n}\log\frac{2}{n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}\\ &=-\log\frac{2}{n}+\log\frac{1}{n}\\ &=-\log 2=-\log|f'(y_i)| \end{aligned}\tag{3.63}$$

（3.63）式说明，帐篷映射（3.60）式每迭代一次，初始条件的信息丧失1bit。那么$n$次迭代后，平均信息损失为

$$\begin{aligned}\overline{\Delta I} &= -\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\log|f'(y_i)| \\ &=-\log 2\end{aligned}\tag{3.64}$$

可以验证对于等概率初条件渐近($n\to\infty$)点集的概率分布函数$p(x)$是（$\mu=4$时）

$$p(x)=\frac{1}{\pi[x(1-x)]^{\frac{1}{2}}}$$

事实上

$$\begin{aligned}\int_0^1 p(x)dx &= \int_0^1\frac{1}{\pi[x(1-x)]^{\frac{1}{2}}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\sin^2\theta)}{\pi\sin\theta\cos\theta}\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}d\theta=1\end{aligned}$$

那么对于所有的条件的平均Lyapunov指数为

$$LE=\int_0^1 p(x)\ln\left|\frac{df}{dx}\right|dx=\int_0^1\frac{\ln|4-8x|}{\pi[x(1-x)]^{\frac{1}{2}}}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln 2^2 + \ln|1-2x|}{\pi[x(1-x)]^{\frac{1}{2}}} dx$$

$$= 2\ln 2 + 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-2x)}{\pi[x(1-x)]^{\frac{1}{2}}} dx$$

$$\overset{令(1-2x)=\sin\theta}{=\!=\!=\!=\!=} 2\ln 2 + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(\sin\theta) d[-\sin^{-1}(1-2x)]$$

$$= 2\ln 2 + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(\sin\theta)(-d\theta)$$

$$= 2\ln 2 + \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right) = \ln 2$$

这和以上分析结论一致。

## §8　浑沌吸引子的多分维

从（3.8）式知，$n$次迭代以后一维映射（3.1）式要收敛到一个偶函数$g(x)$，它满足

$$g(\alpha x) = -\alpha g(g(x)) \tag{3.65}$$

它满足边条件（或归一化条件）

$$g(0) = 1$$

吸引子$g(x)$产生出若干迭代值

$$x_1\text{：}\ g(0) = 1$$

$$x_2\text{：}\ g(g(0)) = -\frac{1}{\alpha}g(0) = -\frac{1}{\alpha}$$

$$x_3\text{：}\ g(g(g(0))) = g\left(-\frac{1}{\alpha}\right) = g\left(\frac{1}{\alpha}\right) \tag{3.66}$$

$$x_4\text{：}\ g\left(g\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) = -\frac{1}{\alpha}g(1) = -\frac{1}{\alpha}\left(-\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

对于$n>4$的点均落在区间

$$[x_4, x_2]\text{和}[x_3, x_1] \tag{3.67}$$

落在这两个区间的概率是相等的，即

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{2} \tag{3.68}$$

但是收缩比为

$$r_1 = \frac{\dfrac{1}{a^2}}{\dfrac{1}{a}} = \frac{1}{a}$$

$$r_2 = \frac{1+\dfrac{1}{a}}{1-g\left(\dfrac{1}{a}\right)} \tag{3.69}$$

（3.68）和（3.69）式代入第四章多分维的公式（4.20）有

$$\frac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^q}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\tau(q)}} + \frac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^q}{\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{a}}{1-g\left(\dfrac{1}{a}\right)}\right)^{\tau(q)}} = 1 \tag{3.70}$$

利用下章多分维的运算，很易从（3.70）求出

$$D_0 = 0.537,\ D_1 = 0.518,\ D_2 = 0.501,\ D_\infty = 0.394$$

## §9 二维映射及吸引域的边界

一维映射（3.1）式具有分形结构或多分维结构，而二维映射的浑沌吸引子也具有这种分形结构。

浑沌的典型二维映射是Heno′n映射

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + by_n - ax_n^2 \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \tag{3.71}$$

也可以写成

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + Y_n - a x_n^2 \\ Y_{n+1} = b x_n \end{cases} \tag{3.72}$$

其中$Y_n = b y_n$

映射（3.72）是一个收缩映射，即Jacobi行列式为

$$|J| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \dfrac{\partial x_{n+1}}{\partial Y_n} \\ \dfrac{\partial Y_{n+1}}{\partial x_n} & \dfrac{\partial Y_{n+1}}{\partial Y_n} \end{vmatrix} = -b \tag{3.73}$$

映射（3.72）有两个不动点

$$x = \frac{-(1-b) \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a}$$

$$y = \frac{b}{2a}[-(1-b) \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}] \tag{3.74}$$

对于$a = 1.4$，$b = 0.3$，这两个不动点分别为

$$(0.631,\ 0.631),\quad (-1.131,\ -1.131) \tag{3.75}$$

它们的Jacobi矩阵的特征值

$$\lambda_1 = -1.924 \qquad \lambda_2 = 0.156 \tag{3.76}$$

$$|\lambda_1| > 1 \qquad |\lambda_2| < 1$$

因此每一次迭代就相当于进行一次伸长和折迭，一个半径为$r$的小圆，经过$n$次迭代后，则变成长轴为$r|\lambda_1|^n$，短轴为$r|\lambda_2|^n$的椭圆，见图3.9。

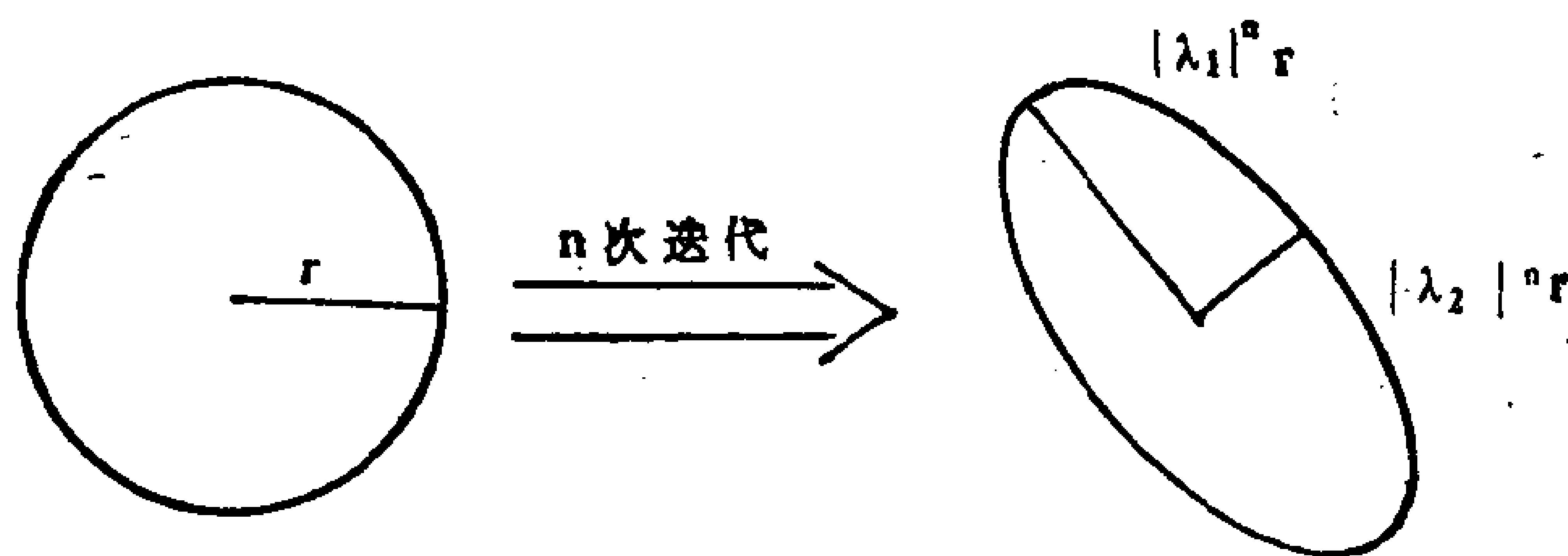



图3.9　二维映射将小圆变成椭圆

因此若用边长为$r$的小方块去覆盖它得到的数目为$N(r)$，则用边

长$|\lambda_2|^n r$的小方块去覆盖它得到的数目就是

$$N(|\lambda_2|^n r) = \frac{|\lambda_1|^n}{|\lambda_2|^n} N(r) \tag{3.77}$$

按照分维定义（2.9）式

$$N(r) = \left(\frac{1}{r}\right)^D$$

故有

$$\left(\frac{1}{|\lambda_2|^n r}\right)^D = \frac{|\lambda_1|^n}{|\lambda_2|^n}\left(\frac{1}{r}\right)^D$$

两边取对数求得

$$D = 1 - \frac{\ln|\lambda_1|}{\ln|\lambda_2|} = 1 + \frac{LE_1}{|LE_2|} \tag{3.78}$$

其中

$$LE_1 = e\frac{1}{n}\ln|\lambda_1|, \quad LE_2 = \frac{1}{n}\ln|\lambda_2| \tag{3.79}$$

分别是Lyapunov 指数。公式（3.78）的一般形式就是Yorke猜想（3.48）式。例如将（3.76）式代入（3.78）式求得

$$D = 1.35$$

Heno′n 吸引子的维数处在 1 和 2 之间是显然的，因为最终状态是一种长变是无穷大的集合。

§5已经说明 Jnlia 集是两个吸引盆的边界，它具有分形的结构。在二维映射中也存在分形的吸引盆边界，例如映射

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \mu x_n + \cos\theta_n \\ \theta_{n+1} &= 2\theta_n (\mathrm{mod} 2\pi) \end{aligned} \tag{3.80}$$

其中$1<\mu<2$

因为映射（3.80）式Jacobi矩阵的特征值是$\mu>1$和2，所以它没有有限的吸引子，它的吸引集分别是$x=-\infty$和$x=+\infty$。

我们现在来找这两个吸引盆的边界$x=f(\theta)$。我们任取一个有限的$x_N$，找一轨道使其末端是$x_N$，由（3.80）

$$x_{K-1} = \mu^{-1} x_K - \mu^{-1}\cos(2^{K-1}\theta_0) \tag{3.81}$$

找到这个开始的轨道为

$$x_0=\mu^{-N}x_N-\sum_{l=0}^{N-1}\mu^{-l-1}\cos(2^l\theta_0) \tag{3.82}$$

因此两个吸引盆的边界是使$x_N$为有限（当$N\to\infty$）的集合（$x_0$，$\theta_0$），所以吸引盆的边界是

$$x=-\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}\cos(2^l\theta)\equiv f(\theta) \tag{3.83}$$

（3.83）式和（1.1）比较可以看出，它是Weierstrass曲线，由于$\mu>1$，（3.83）式是收敛的。但是它的微商

$$\frac{df(\theta)}{d\theta}=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{2}{\mu}\right)^{l+1}\sin(2^l\theta) \tag{3.84}$$

由于$\mu<2$，（3.84）式求和是发散的，即处处不可微。已经证明曲线（3.82）的分维数为

$$D=2-\frac{\log\mu}{\log2} \tag{3.85}$$

# 第四章　多分维及其标度律

## §1　单标度和多标度

在第二章中，单一的标度和分维是与自相似和均匀各向同性湍流联系在一起的。

先拿传统的 Cantor 集合来讲，我们可以理解成质量是均匀分布的。我们把Cantor集合看成是由长度$r_0=1$，质量$P_0=1$的一个均匀棒逐步形成的。

第一步将棒切成两半，质量在每一部分为$P_1=P_2=\frac{1}{2}$，然后将它们分别锤打成长度$r_1=\frac{1}{3}$。这样密度由$\rho_0=\frac{P_0}{r_0}=1$变成密度

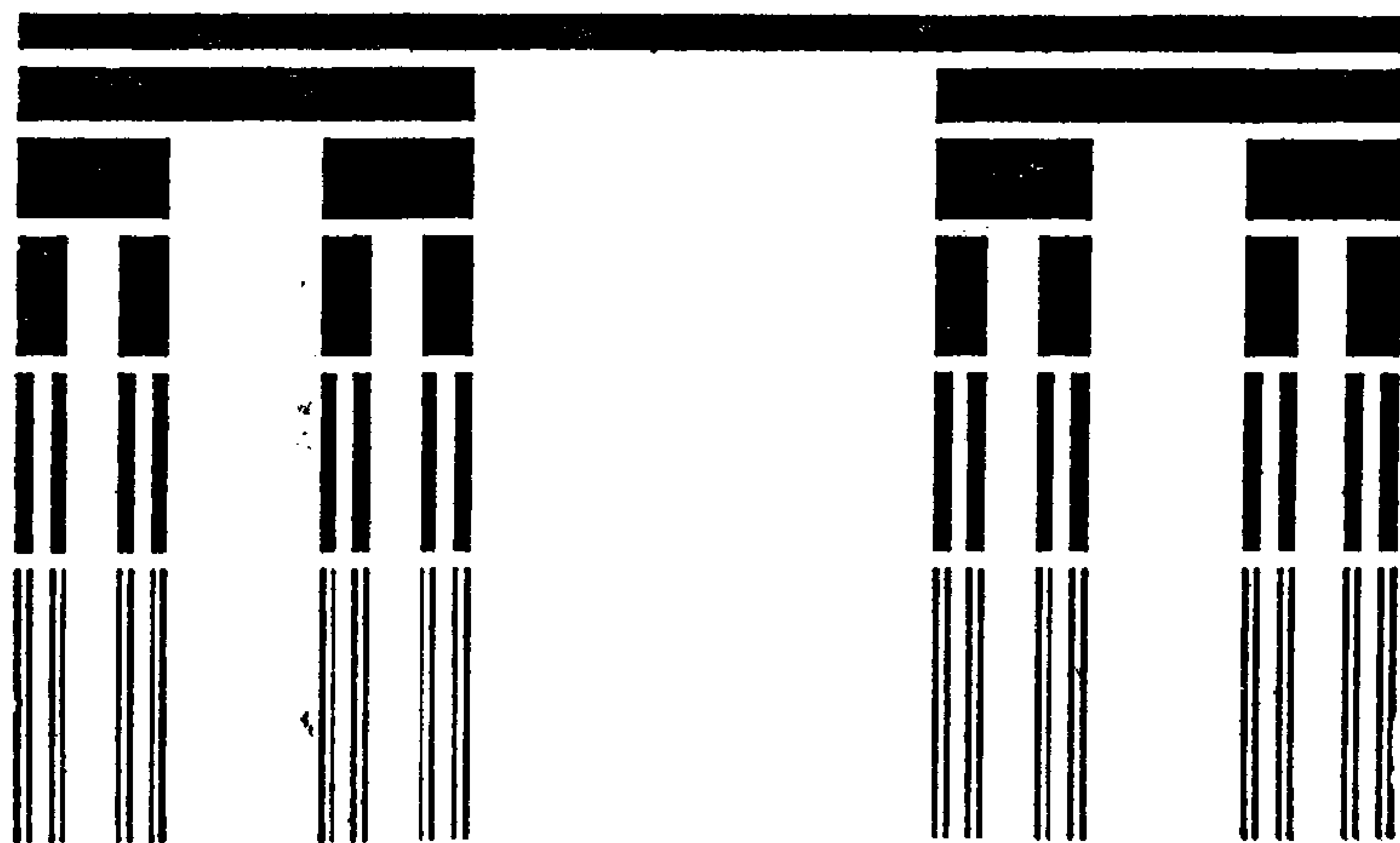


图4.1　传统的Cantor集合棒

$\rho_1=\frac{P_1}{r_1}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=3/2$。重复以上过程，就得到密度不断增加（在图4.1中密度是以棒的高度来表示的），而长度不断减小的Cantor集合，见图4.1。

若第$n$步，共有$N=2^n$个小棒，每一个长度为

$$r_i=3^{-n}\qquad(i=1,2,\cdots N)\tag{4.1}$$

每一个棒的质量为

$$P_i=2^{-n}=\frac{1}{N}\qquad(i=1,2,\cdots N)\tag{4.2}$$

并且在这个过程中总质量是守恒的，即

$$\sum_{i=1}^{N}P_i=1\tag{4.3}$$

若把每一小段棒的质量写成

$$P_i=r_i^{\alpha}\tag{4.4}$$

其中$\alpha$即为标度指数，则由（4.1）式和（4.2）式看出

$$2^{-n}=(3^{-n})^{\alpha}\tag{4.5}$$

故

$$\alpha=\frac{\log2}{\log3}\tag{4.6}$$

因而密度

$$\rho_i=\frac{P_i}{r_i}=\rho_0 r_i^{\alpha-1}\tag{4.7}$$

因为$r_i\to0$时，$\rho_i\to\infty$（即发散），所以标度指数控制密度的奇异性，故$\alpha$也叫奇异性指数，数学上叫Lipschitz-Hölder指数。

从（4.2）式还看出，这种Cantor集合的质量可以看成是均匀分布的。这时也可以说带有奇异性指数$\alpha$的奇异性是由一个分数维$f=D$所支持的。

对这种棒的分布函数$F(r)$可表示为

$$F(r)=\int_0^r \rho(r)dr=\int_0^r dP \tag{4.8}$$

其次，第二章中的均匀间歇湍流模型也是属于单标度。由著名的粘性流体Navier-Stokes方程

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}=-\nabla P+\nu\nabla^2\vec{v} \tag{4.9}$$

和不可压缩连续方程

$$\nabla\cdot\vec{v}=0 \tag{4.10}$$

在如下的标度变换下：

$$r\to\lambda r,\quad \vec{v}\to\lambda^{a}\vec{v},\quad t\to\lambda^{1-a}t,\quad \nu\to\lambda^{a+1}\nu \tag{4.11}$$

形式不变。

此时三维湍流能量耗散率

$$\varepsilon=\overline{\nu(\nabla\cdot\vec{v})^2} \tag{4.12}$$

则满足如下变换

$$\varepsilon\to\lambda^{3a-1}\cdot\varepsilon \tag{4.13}$$

U·Frisch考虑小尺度涡旋并不充满空间，若原来涡旋的尺度为1，则串级$n$次以后的涡旋尺度$r_n=2^{-n}$。图4.2的阴暗部分代表活动涡旋的串级方式，它们只占空间的部分为$\beta=2^{D-3}$，其中$D$是分维，此时从尺度$r_n$的涡旋输送到$r_{n+1}$的涡旋的能量为$\varepsilon_n\propto\frac{v_n^3}{r_n}$，其中$v_n=\Delta v$是速度差。由于串级过程中能量输送率是常数，即

$$\varepsilon_n=\beta\varepsilon_{n+1},\qquad \frac{v_n^3}{r_n}=\beta\frac{v_{n+1}^3}{r_{n+1}} \tag{4.14}$$

串级关系（4.14）式的解为

$$\frac{v_n^3}{r_n}=\beta^{-n}=(2^{D-3})^{-n}=(2^{-n})^{D-3}=r_n^{D-3}$$

故 $$v_n=\Delta v=r^{1/3}\cdot r^{\frac{D-3}{3}}=r^{\frac{D-2}{3}} \tag{4.15}$$

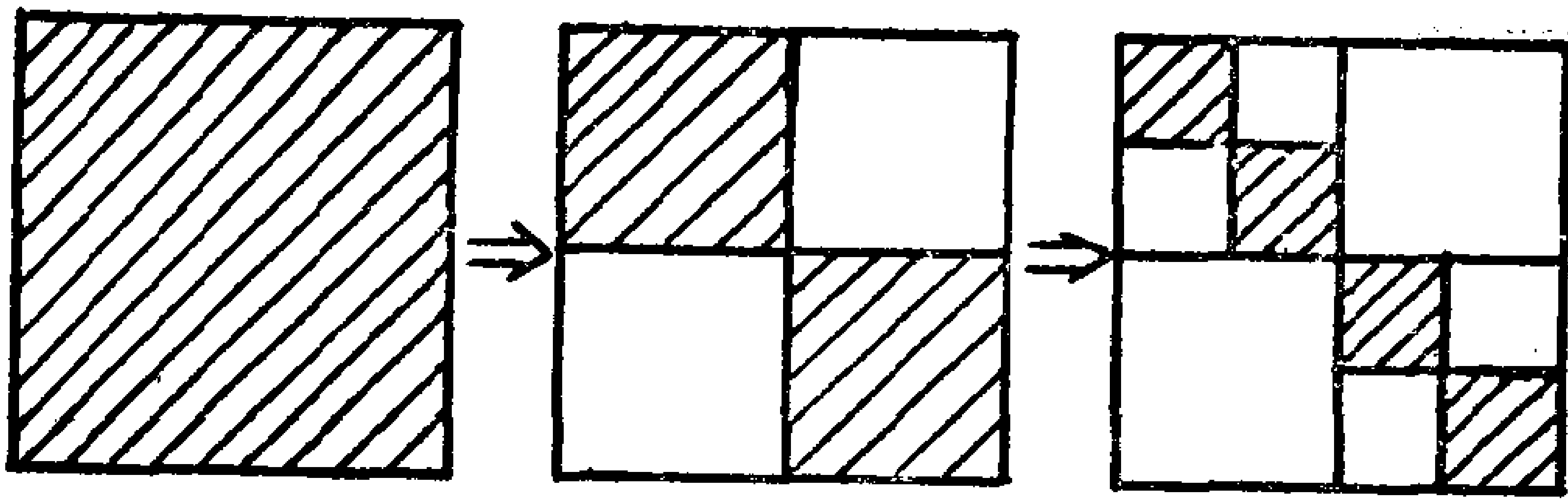


图4.2 β模型串级格式

由（4.15）式就得到标度指数

$$\alpha=\frac{D-2}{3} \tag{4.16}$$

因为时间尺度$t_n=\frac{r_n}{v_n}$，能量$E_n=\varepsilon_n t_n$，所以能量$E_n$的尺度正比于时间尺度$t_n$，由（4.15）式

$$t_n=\frac{r_n}{v_n}\propto r^{2/3}\cdot r^{\frac{3-D}{3}}$$

按（2.37）式，能量的量纲又为$r^{\beta-1}$，由此

$$\beta-1=\frac{2}{3}+\frac{3-D}{3}$$

所以功率谱指数

$$\beta=\frac{5}{3}+\frac{3-D}{3} \tag{4.17}$$

这样的湍流模型叫β模型。当$D=3$时，由（4.16）式和（4.17）式得到

$$\alpha=\frac{1}{3},\ \beta=\frac{5}{3} \tag{4.18}$$

这就是Kolmogorov均匀各向同性湍流的模型，此时由（4.13）式知，$\varepsilon$是标度变换的不变量。

这两个例子都说明，对于均匀分布的物理场的分形，我们只要一个标度指数$\alpha$及其相应的分维$D$来描述，此时大尺度结构是

小尺度的放大。

但是实际的物理场常常都是非均匀的分形，如人口在全球分布，气象台站在全世界的分布，湍流能量耗散率的分布，杂质在表面的分布，磁矩涨落的分布，金属（如金子）的分布等，它们的每一小部分可以有不同的标度指数(如第二章介绍的自仿射)，此时大尺度结构就不再简单地就是小尺度的放大。

## §2 非均匀分布的Cantor集合

上一节的 Cantor 集合棒，$N$ 个小棒中的每一个，其质量都为$\frac{1}{N}$。现在考虑质量$P_i$为非均匀的Cantor集合棒。它的形成步骤是：最初棒长$r_0=1$，其质量为$P_0=1$，第一步将棒分成两段，左段长度$r_1=0.25$，但质量为$P_1=0.6$，右端长度$r_2=0.4$，但质量为$P_2=(1-0.6)=0.4$。中间一段去掉。如此下去，将左段和右段再各分成两段。左边的两段长度分别为$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}$，质量分别为$P_1P_1$，$P_1P_2$。右边两段长度分别为$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}$，$\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}$，质量分别为$P_2P_1$，$P_2P_2$。依此类推，就形成图4.3 的不均匀的 Cantor 集合棒。

此时我们既不能象均匀棒（图4.1）那样以同一盒子尺度（4.1）式去量，因为此时第一步若用$\frac{2}{5}$的尺子去量得盒子数为 2，但此时并不能反映左段和右段的不均匀的长度。我们也不能象第二章带有不等比的Cantor 集合那样用两个尺子，但是不能反映不均匀的质量。

为了反映质量的不均匀，我们使用质量的$q$阶矩$\sum\limits_i P_i^q$，它代表被加权的盒子数$N$。为了反映长度的尺子不均匀，我们设这个

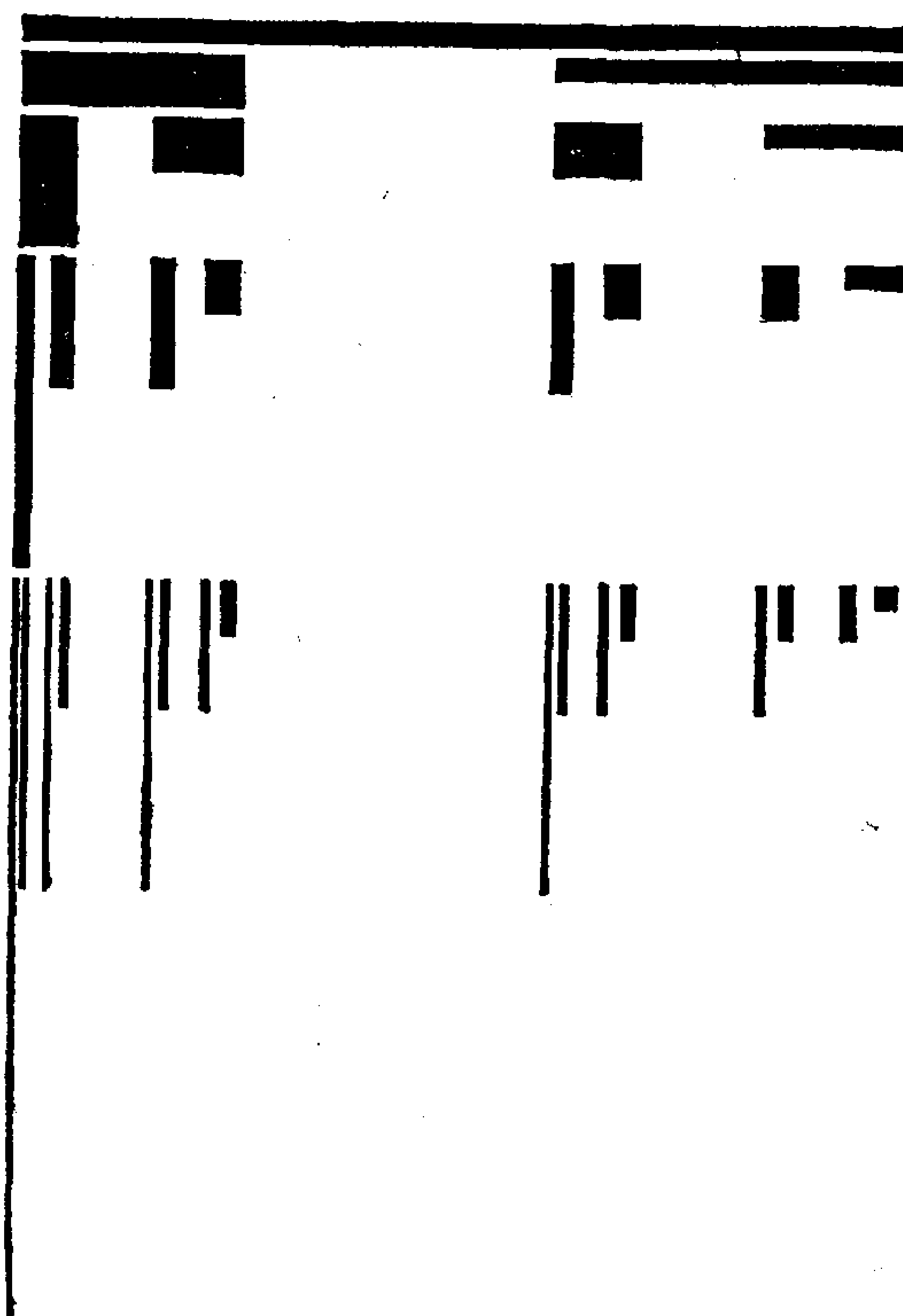


图4.3 不均匀分布Cantor集合棒

质量数$N$（或$q$阶矩）不是和 $r^{-D}$成正比（如第二章不等比的Cantor集合），而是和$r^{\tau(q)}$成正比，即

$$\sum_i P_i^q \sim r^{\tau(q)} \tag{4.19}$$

其中$\tau(q)$可以叫做矩（$q$阶）的标度指数。和第二章不等比的Cantor集合的（2.47）式类似，我们有

$$\frac{P_1^q}{r_1^{\tau(q)}} + \frac{P_2^q}{r_2^{\tau(q)}} = 1 \tag{4.20}$$

（4.20）式是确定$q$阶矩标度指数 $\tau(q)$的超越方程。

由（4.19）式得

$$-\tau(q)=\frac{\log\sum\limits_{i}P_i^q}{\log(1/r)} \tag{4.21}$$

（4.21）式和分维定义（2.9）式比较可以看出，当 $q=0$ 时，$\sum P_i^q=N$，此时

$$-\tau(o)=D_0 \tag{4.22}$$

这就是该集合的分维。为了区分$q\neq 0$的情况，（4.22）式中用$D_0$表示这个分维。此时（4.20）式化为（2.47）式。

由（4.21）式还可看出，当$q=1$时，$\sum\limits_{i}P_i=1$，因而 $\tau(1)=0$。

## §3 奇异性标度指数α及分布函数标度指数$f(\alpha)$

从§1均匀Cantor棒看出，此时只要一个奇异性指数$\alpha$及相应的分维$D_0$来支持。但是对于非均匀分布的Cantor集合棒，质量矩的标度指数为$\tau(q)$，由于质量是非均匀的，每个小段（或子集合）的标度指数$\alpha(q)$及其相应的分维$f(\alpha)$又如何确定呢？

显然，若是质量均匀的棒，它的$q$阶矩$\sum P_i^q$按（4.4）式就正比于$r^{\alpha q}$，现在对非均匀棒，对每一小段用尺度$r$的盒子覆盖量出的数目为

$$\rho(\alpha)d\alpha\cdot r^{-f(\alpha)} \tag{4.23}$$

其中$\rho(\alpha)d\alpha$是$d\alpha$段内的集合数。故$\sum P_i^q$有

$$\sum_i P_i^q=\int\rho(\alpha)r^{-f(\alpha)}\cdot r^{\alpha q}d\alpha \tag{4.24}$$

上面的积分，当$r\rightarrow 0$时，对积分贡献最大的是$\alpha q-f(\alpha)$最小项，即

$$\frac{d}{d\alpha}[\alpha q-f(\alpha)]_{\alpha=\alpha(q)}=0 \tag{4.25}$$

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}[\alpha q - f(\alpha)]_{\alpha=\alpha(q)} > 0 \qquad (4.26)$$

由（4.25），（4.26）式得出

$$\left.\frac{df}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha(q)} = q \qquad (4.27)$$

$$\left.\frac{d^2 f}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=\alpha(q)} < 0 \qquad (4.28)$$

将（4.19）式和（4.24）式比较得到

$$\tau(q) = \alpha(q)q - f(\alpha(q)) \qquad (4.29)$$

（4.28）式说明，曲线$f(\alpha)$是一个上凸的函数。（4.27）式说明，函数$f(\alpha)$的斜率数值就是$q$阶矩的阶数。

由（4.29）式还得出

$$\frac{d\tau}{dq} = \alpha(q) + q\frac{d\alpha}{dq} - \frac{df}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dq}$$

$$= \alpha(q) + \frac{d\alpha}{dq}\left(q - \frac{df}{d\alpha}\right)$$

根据（4.27）式，上式右端第二次为零，故

$$\frac{d\tau}{dq} = \alpha(q) \qquad (4.30)$$

（4.29）式说明，若标度指数$\alpha(q)$及其支持的维数$f(\alpha(q))$给定，则它的$q$阶矩的标度指数$\tau(q)$即可知道。反之，若已知$\tau(q)$，则标度指数$\alpha(q)$由（4.30）式可以决定，然后由（4.29）式决定$f(\alpha)$。

对于图4.2的不均匀的Cantor集合棒，我们可由（4.20）式数值上决定$\tau(q)$，然后由(4.30)，(4.29)式决定$f(\alpha)$曲线，如图4.4。

由图4.4看出，曲线$f(\alpha)$最高点的斜率$\frac{df}{d\alpha}=0$，由(4.29)式知该点的$f$值就是

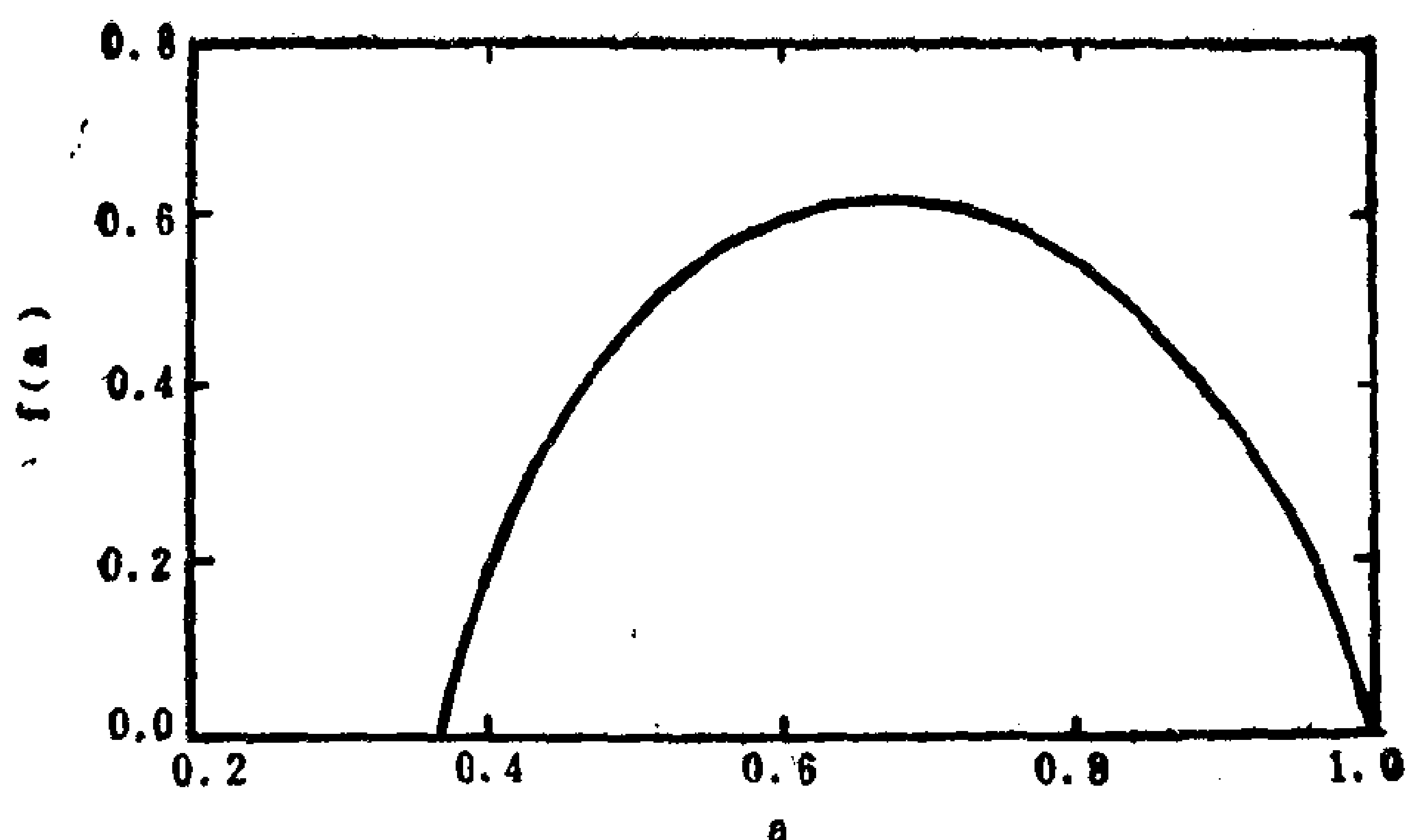



图4.4 不均匀分布Cantor集合棒的$f(\alpha)$曲线

$$-\tau(o)=f(\alpha(o)) \quad (4.31)$$

将（4.31）式和（4.22）式比较，它就是该集合的分维数$D_0$=0.6110。

由（4.20）式，当$q\to+\infty$时，$P_1^q\gg P_2^q$，故近似有

$$\frac{P_1^q}{r_1^{\tau(q)}}=1 \quad (4.32)$$

斜率$+\infty$，相当于图4.3的$\alpha$最小值处$\alpha_{min}$，此处$f(\alpha_{min})=0$，故由（4.29）式得

$$\tau(q)|_{q\to+\infty}=\alpha_{min}\cdot q \quad (4.33)$$

将（4.33）式代入（4.32）式求得

$$\alpha_{min}=\frac{\ln P_1}{\ln r_1}=0.3685 \quad (4.34)$$

同样，$q\to-\infty$时，这相当于$f(\alpha)$曲线的$\alpha$最大处$\alpha_{max}$，且

$$\tau(q)|_{q\to-\infty}=\alpha_{max}\cdot q \quad (4.35)$$

其中 $$\alpha_{max}=\frac{\ln P_2}{\ln r_2}=1 \quad (4.36)$$

由（4.4）式看出，$\alpha_{min}$和$\alpha_{max}$分别相当于浓度最大和最小的区域。因此用被加权的盒子数$\sum P_i^q$和加权因子为$r^{-f(\alpha)}$，更能反映

这种非均匀的结构。

## §4 Renyi信息和$D_q$

从第三章我们已经知道，若以$r$为尺寸的小盒子去量分形对象，或分辨率为$\frac{1}{r}$，则 Shannon信息和$\log\left(\frac{1}{r}\right)$成正比。若分形（或吸引子）的维数是$D_1$，则其信息量就是$\log\left(\frac{1}{r}\right)$的$D_1$倍，即

$$I_1 = D_1 \cdot \log\left(\frac{1}{r}\right) \tag{4.37}$$

或

$$D_1 = \frac{I_1}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{-\sum_{i=1}^{N} P_i \log P_i}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \tag{4.38}$$

其中$D_1$叫信息维。由（4.37）式看出，分维数$D_1$是和信息成正比的。对于均匀分布的分形，由（4.2）式知

$$P_i = \frac{1}{N} \tag{4.39}$$

因而

$$D_1 = \frac{-\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \log \frac{1}{N}}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\log N}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} = D_0 \tag{4.40}$$

即信息维$D_1$和分数维$D_0$相等。

对于非均匀的分形，要考虑它的q阶矩$\sum_i P_i^q$，为此引入表征非均匀结构的普遍化的Renyi信息$I_q$

$$I_q = \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^{N} P_i^q \tag{4.41}$$

和信息维$D_1$定义(4.38)式类似，普遍化的Renyi维数$D_q$定义为

$$D_q = \frac{I_q}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{1}{1-q} \frac{\log \sum_{i=1}^{N} P_i^q}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \tag{4.42}$$

这样定义的$D_q$，显然包括了$D_0$和$D_1$。在（4.42）式中取$q=0$，$D_0$就是Fractal维数。在（4.42）式中取$q=1$，利用求极限$q\to1$的罗比塔法则，就得到信息维$D_1$。因此$D_0$和$D_1$的差别正反映了分形的非均匀性。

将（4.21）式和（4.42）式比较，得到$q$阶矩的标度指数$\tau(q)$和$D_q$的关系，即

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1} \tag{4.43}$$

结合上节的结果，下表列出$\tau(q)$，$\alpha(q)$，$f(\alpha(q))$及$D_q$的特殊值。

表4.1 $\tau(q)$，$\alpha(q)$，$f(\alpha(q))$，$D_q$在$q=0,1,\pm\infty$处的值，其中$\alpha_1$由（4.21）式和（4.30）式求得

| $q$ | $\tau(q)$ | $\alpha=\frac{d\tau}{dq}$ | $f(\alpha)=\alpha q-\tau(q)$ | $D_q$ |
|---|---|---|---|---|
| $-\infty$ | $q\alpha_{max}$ | $\alpha_{max}$ | 0 | $\alpha_{max}$ |
| 0 | $-D$ | $\alpha_0$ | $f_{max}=D$ | $D$ |
| 1 | 0 | $\alpha_1=\frac{-\sum_i P_i \log P_i}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$ | $f(\alpha_1)=\alpha_1$ | $D_1$ |
| $+\infty$ | $q\alpha_{min}$ | $\alpha_{min}$ | 0 | $\alpha_{min}$ |

对于图4.2的不均匀分布Cantor集合棒，其$D_q$随$q$的变化见图4.5。

分数维谱$D_q$的定义（4.42）式及（4.43）式，显然包括了均匀分布的特殊情况。对于均匀分布时，据表4.1和（4.43）式，

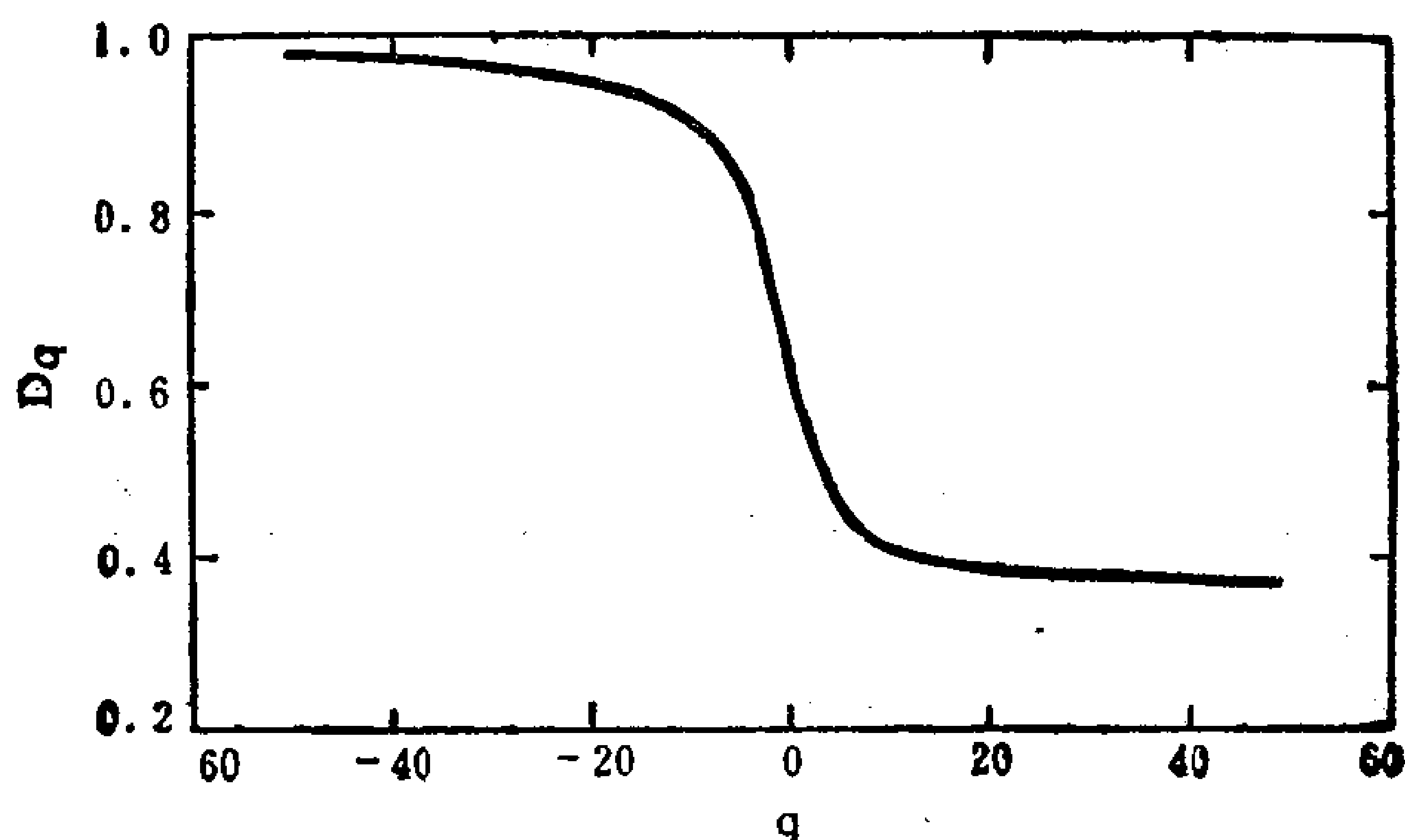



图4.5 不均匀棒的分数维谱$D_g$随$g$的变化
($D_0=0.6110$, $D_\infty=0.3685$, $D_{-\infty}=1$)

有

$$\tau(0)=-D_0,\ N=r^{-D_0},\ P_i=\frac{1}{N}=r^{D_0} \tag{4.44}$$

$$f(\alpha)=D_0,\ \alpha=D_0,\ f(D_0)=D_0$$

由(4.42),(4.43)式,对$q\neq0$,则有

$$D_g=\frac{1}{1-q}\frac{\log\sum_{i=1}^{N}r^{D_0q}}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

$$=\frac{1}{1-q}\frac{\log(r^{D_0q}\cdot r^{-D_0})}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

$$=\frac{1}{1-q}\frac{D_0(q-1)\cdot\log r}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

$$=D_0 \tag{4.45}$$

或由(4.29)式和(4.43)式得

$$D_q=\frac{1}{q-1}[\alpha q-f(\alpha)] \tag{4.46}$$

对于均匀分布，将（4.44）式代入上式得

$$D_q = \frac{1}{q-1}[D_0 q - f(D_0)]$$

$$= \frac{1}{q-1}[D_0(q-1)] = D_0 \quad (4.47)$$

（4.44），（4.47）式表明，对均匀的分数维，$f(\alpha)$ 在平面 $f-\alpha$ 上仅仅是一个点。

另外，表4.1中对于$q=1$的情况，按（4.46）式求$q\to 1$的极限有

$$D_1 \underset{q\to 1}{=} \frac{1}{q-1}[\alpha q - f(\alpha)]$$

$$= \alpha + q\frac{d\alpha}{dq} - \frac{df}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dq}\Big|_{q=1}$$

由（4.27）式，上式可写为

$$D_1 = \alpha + q\frac{d\alpha}{dq} - q\frac{d\alpha}{dq} = \alpha_1 \quad (4.48)$$

据（4.27）式，该点处$f(\alpha)$的斜率为1，即$\frac{df}{d\alpha}=1$，因而

$$D_1 = \alpha_1 = f(\alpha_1) = f(D_1) \quad (4.49)$$

## §5 人口分布的多分维过程

假设在单位长度间隔上分成两个相等的部分，其左边一半人口占的比例为$P$，而右边一半则是$1-P$，再将左、右两边各分成两半$\left(每段长为\frac{1}{4}\right)$，其人口占的比例则分别为

$$PP,\ P(1-P),\ (1-P)P,\ (1-P)(1-p)$$

这种过程不断下去，显然得到带有多种标度奇异性的多分维非均匀分布。

此时是一种尺度$\left(r=\frac{1}{2}\right)$，故按照（4.21）式，$q$阶矩的标度指数为

$$-\tau(q)=\frac{\log[P^q+(1-P)^q]}{\log 2} \tag{4.50}$$

对$P=0.25$，$\tau(q)$随$q$的变化见图4.6。

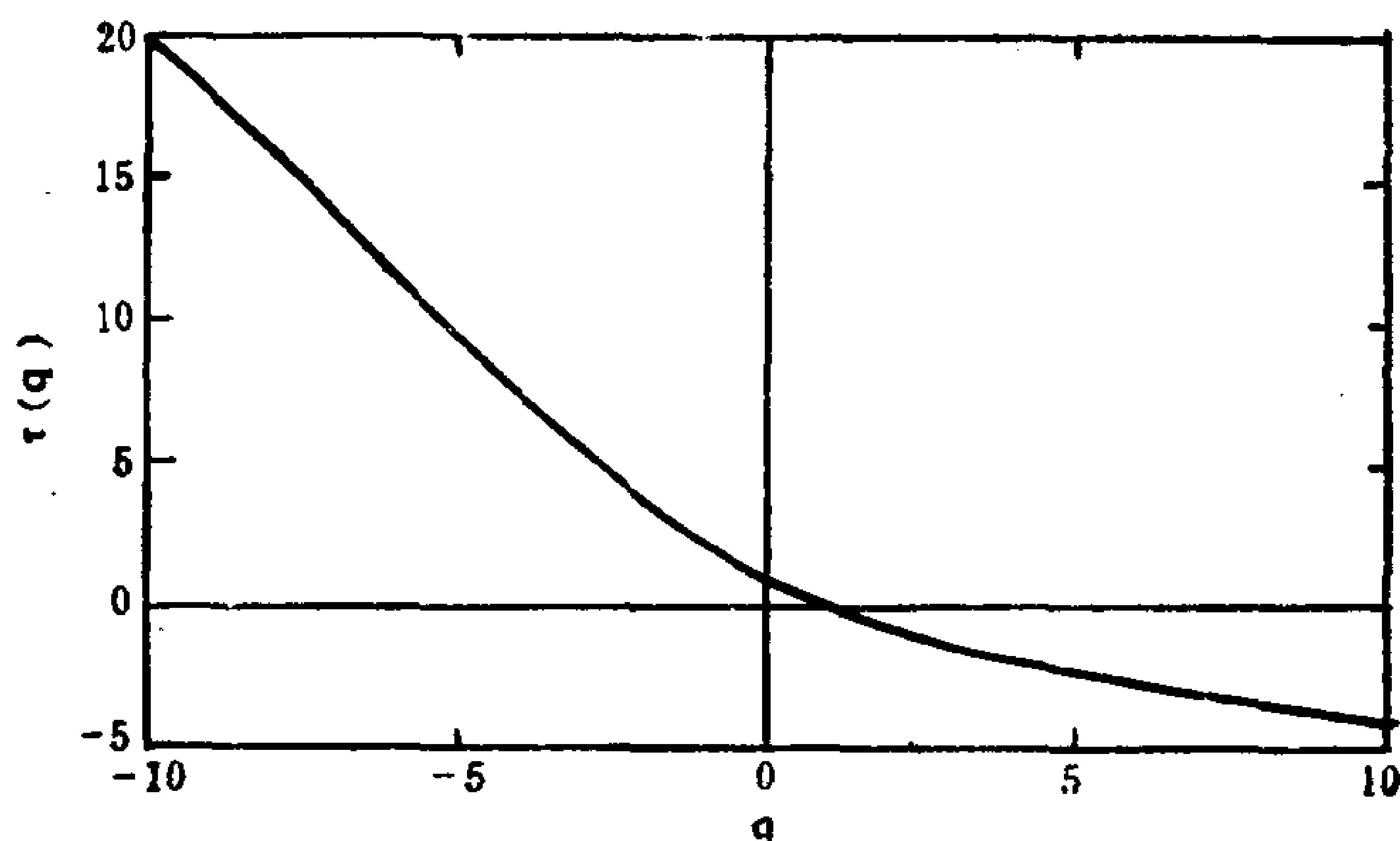



图4.6 $\tau(q)$随$q$的变化

由（4.22）式，$q=0$时

$$-\tau(0)=D_0=1 \tag{4.51}$$

这是自相似集合的维数，即单位长度线段的维数。

由（4.30）式可以求得奇异性指数

$$\alpha(q)=\frac{d\tau}{dq}=-\frac{1}{\log 2}\frac{P^q\log P+(1-P)^q\log(1-P)}{P^q+(1-P)^q} \tag{4.52}$$

对$q=1$，（4.52）式有

$$\alpha(1)=\frac{-P\log P-(1-P)\log(1-P)}{\log 2}=D_1 \tag{4.53}$$

这就是信息维，参看（4.48）式。

再由（4.29）式，可以求得奇异性指数所相应的分维

$$f(\alpha)=\alpha(q)\cdot q-\tau(q)$$

$$=\frac{1}{\log 2}\left[\log(P^q+(1-P)^q)-q\right.$$

$$\left.\cdot\frac{P^q\log P+(1-P)^q\log(1-P)}{P^q+(1-P)^q}\right]$$

$$=\frac{1}{\log 2}\left[\log(P^q+(1-P)^q)\right.$$

$$\left.-\frac{P^q\log P^q+(1-P)^q\log(1-P)^q}{P^q+(1-P)^q}\right] \quad (4.54)$$

对$P=0.25$，则$f(\alpha)$随$\alpha$的变化见图4.7。

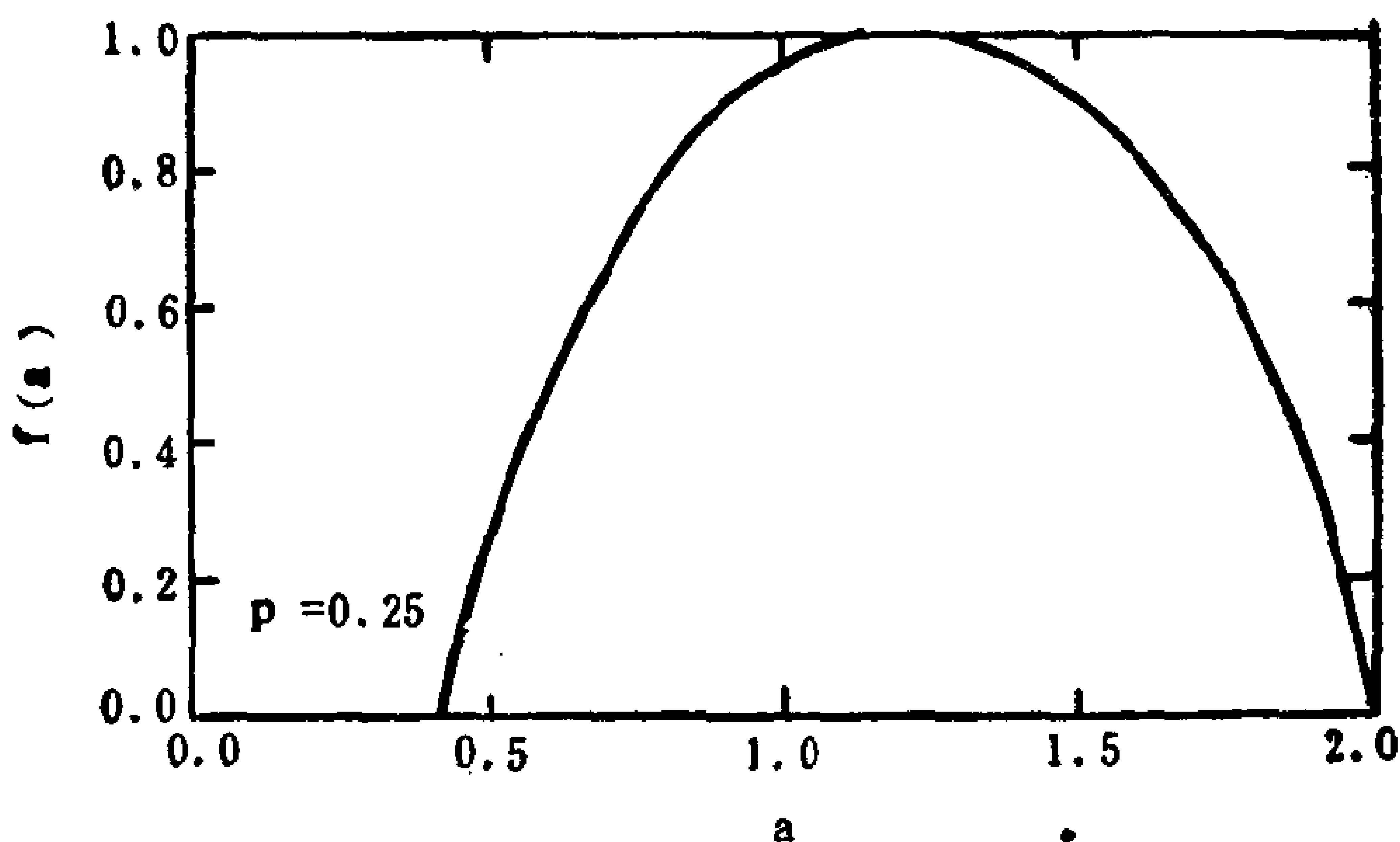



图4.7　带有奇异性指数$\alpha$的子集合的分维

由（4.43）式也很容易决定其多分维$D_q$。

从图4.7上看出$\alpha_{max}=D(-\infty)$，$\alpha_{min}=D(+\infty)$，$f_{max}=D(0)$。

从人口的分布看，$\alpha(q)$代表人口局地密度的标度指数，$f(\alpha)$代表其相应的分数维，而$\tau(q)$代表人口分布函数的标度指数。

## §6 Devil's楼梯

§1是均匀分布Cantor集合棒，每一小段的质量按（4.4）式为$P_i = r^{\alpha_i}$，其中$\alpha_i$是常数。而第二节的非均匀分布 Cantor 集合，$\alpha_i$是变化的。那么按（4.8）式，从0到$x$的质量和（即质量分布函数）$F(x)=\int_0^x dP(x)$又具有什么形式呢？对于均匀分布情况，$F(x)$显然随着$x$的加大的加大，而且$F(1)=1$。但是由于在0到$x$区间中有许多空隙，因而在空隙中质量保持常数，故形成一个楼梯状的分布，见图4.8。

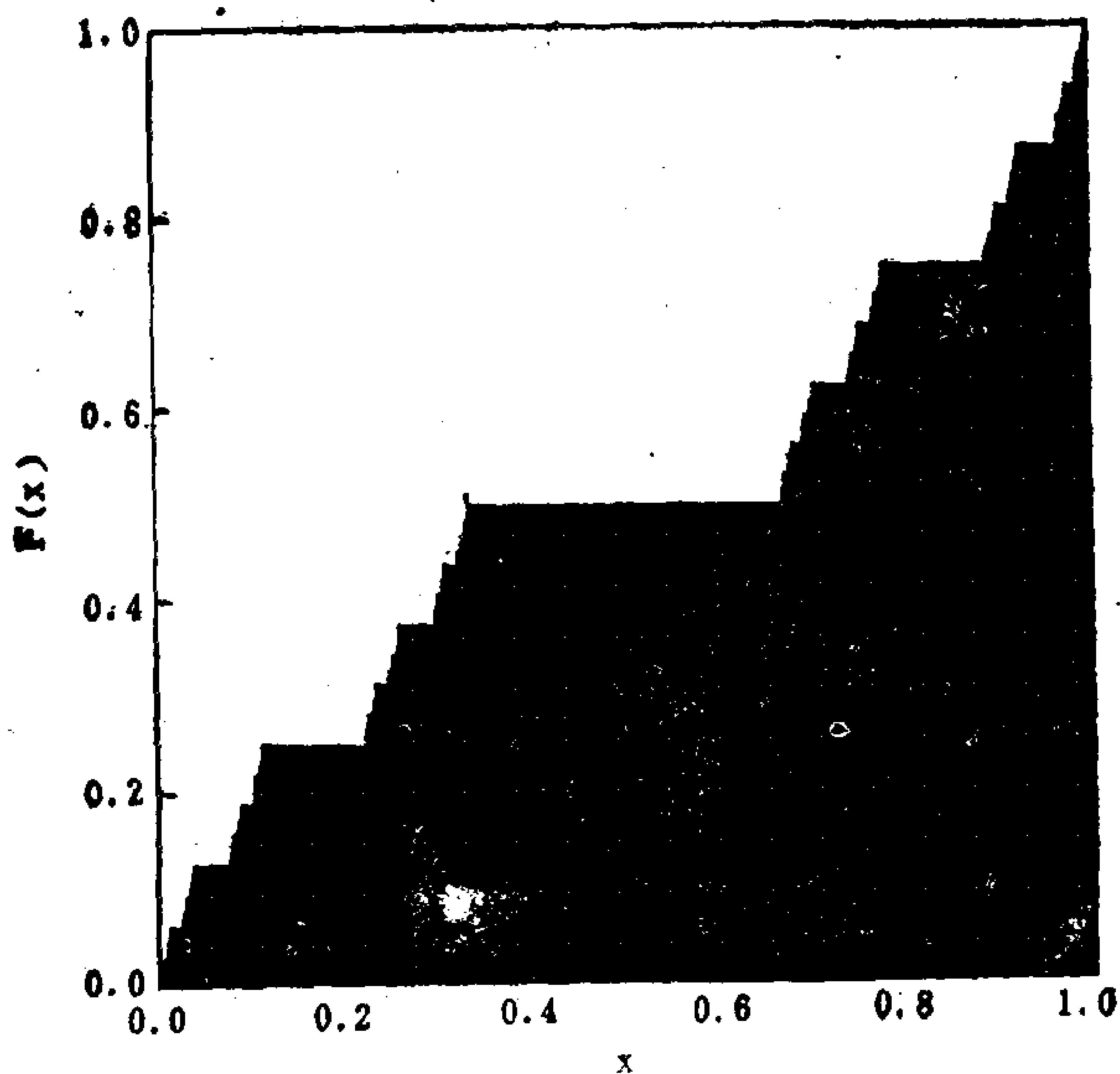



图4.8　均匀分布Cantor棒的质量分布——Devil's楼梯

对于一种尺度的人口分布$\left(r=\frac{1}{2}\right)$，每一小段的质量$P_i$分别为（对于第一步）$P$和$(1-P)$。对于第二步，$P_i$分别是$PP$，$P(1-P)$，$(1-P)P$，$(1-P)(1-P)$。其质量分布函数$F(x)$仍

是一种楼梯，见图4.9。

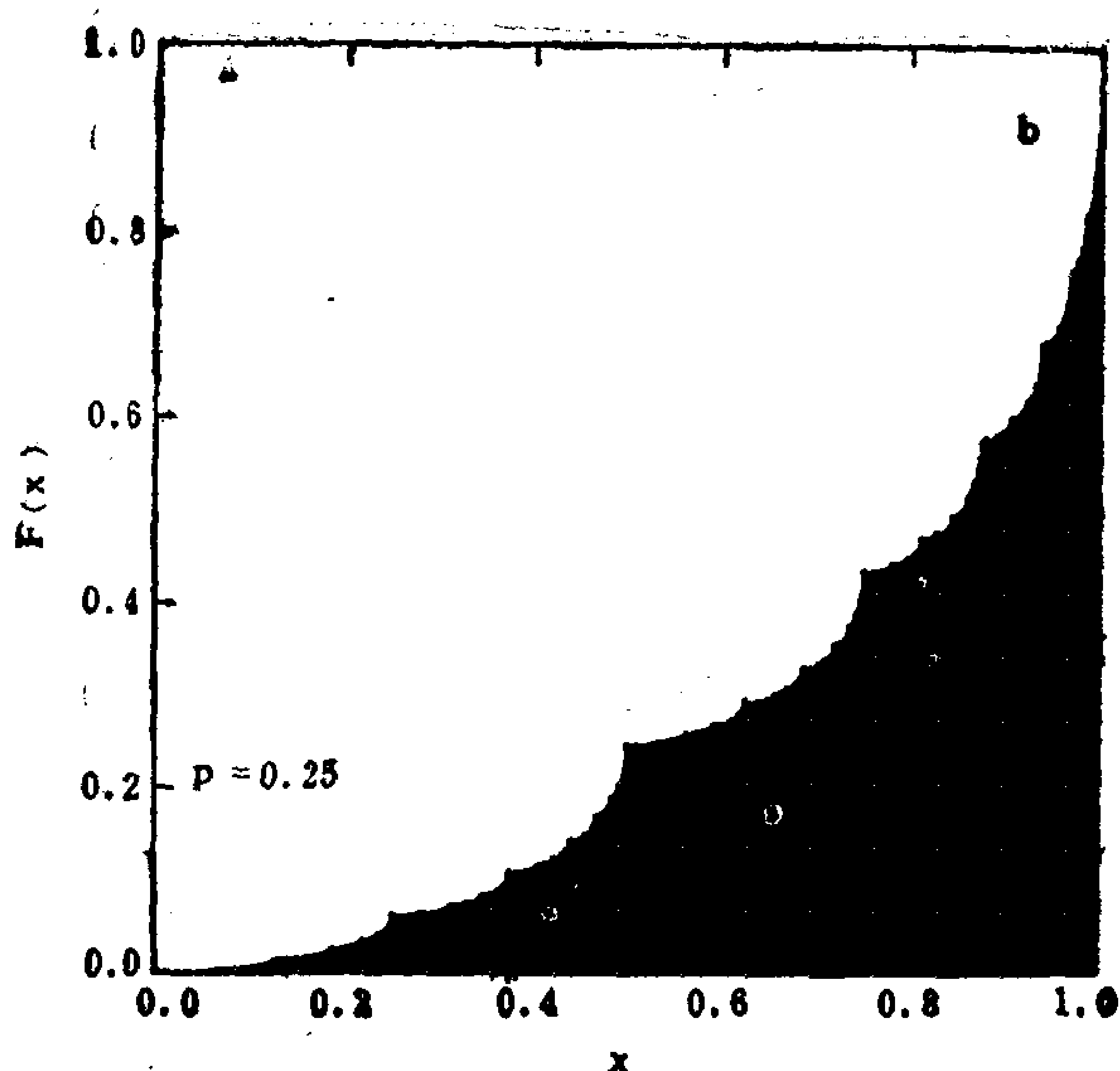



图4.9 一种尺度的非均匀分布函数$F(x)$楼梯

这种分布函数$F(x)$服从自仿射变换

$$\begin{cases} F(x)=PF(2x) & \text{当} 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2} \\ F(x)=P+(1-P)F(2x-1) & \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1 \end{cases} \quad (4.55)$$

(4.55) 式说明，图 4.9 的左边和右边两个部分都可以用整体来描述。

Devil's 楼梯现象常出现在许多物理系统的相锁 ( Phase-locked)问题中，即系统中两个竞争的频率的比是一个有理数时（或共振）。图4.10是复杂化学振荡的频率比为反应率的函数，它是典型的Devil's 楼梯。所以，Devil's 楼梯结构是一个分维或多分维过程。

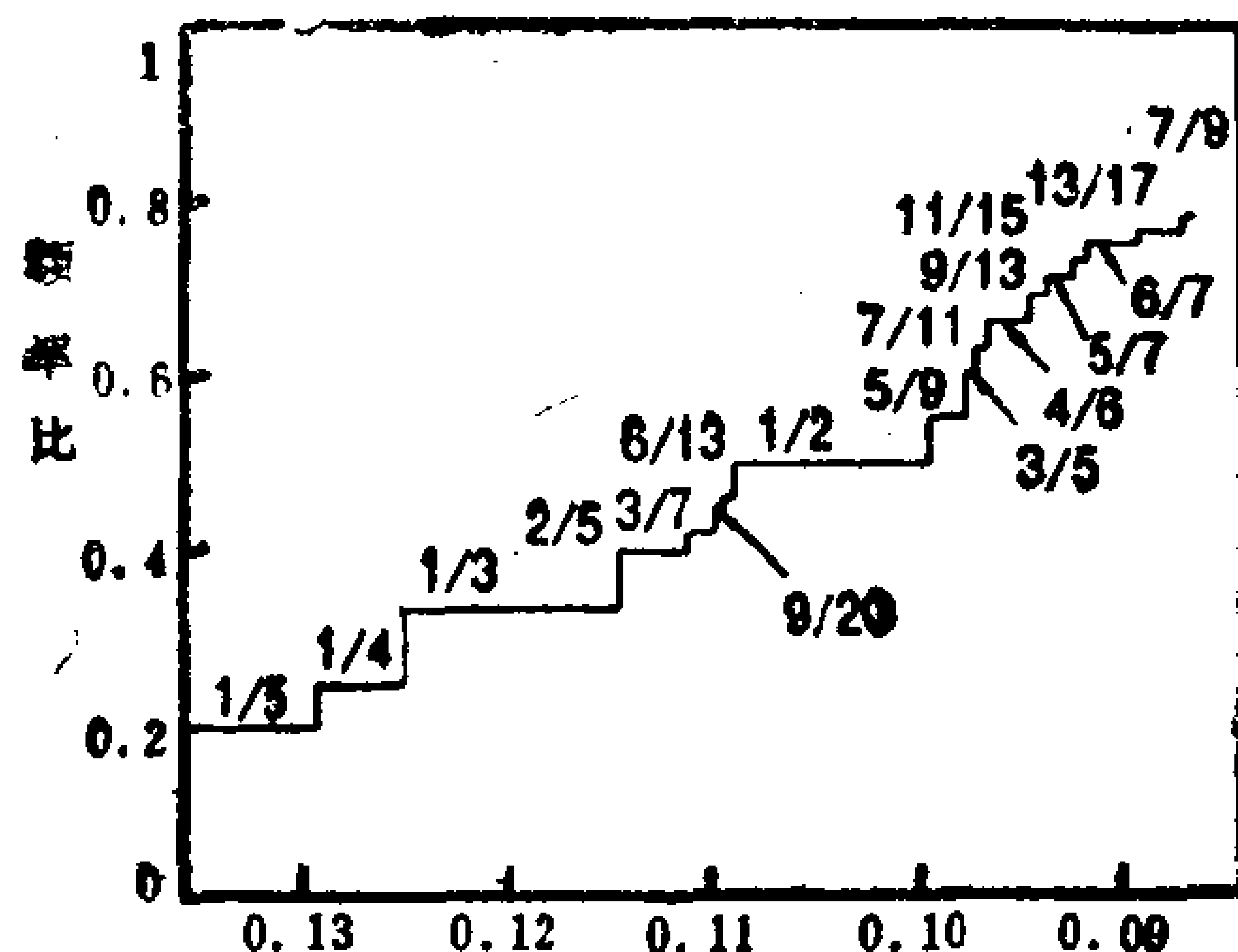



图4.10 复杂化学反应动力系统的振荡频率楼梯

## §7 有两个长度尺度的非均匀分布多分维过程

§5是一种长度$\left(r=\frac{1}{2}\right)$的非均匀分布，§2是两种长度的非均匀分布。此时$q$阶矩的标度指数$\tau(q)$满足（4.20）式，即

$$\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^q}{\left(\frac{1}{4}\right)^{\tau(q)}}+\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^q}{\left(\frac{2}{5}\right)^{\tau(q)}}=1 \tag{4.56}$$

这是$\tau(q)$的超越方程，可以用数值法求解。

若稍加改动，$r_1=\frac{1}{2}$，$r_2=\frac{1}{4}$，$P_1=\frac{2}{3}$，$P_2=\frac{1}{3}$，则上式改为

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^q}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\tau(q)}}+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^q}{\left(\frac{1}{4}\right)^{\tau(q)}}=1$$

或

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\tau(q)}\left(\frac{2}{3}\right)^q+\left(\frac{1}{2}\right)^{\tau(q)}\left(\frac{1}{3}\right)^q=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)^{\tau(q)}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^q 2^{\tau(q)}+4^{\tau(q)}\left(\frac{1}{3}\right)^q-1=0 \tag{4.57}$$

令 $$2^{\tau(q)}=\lambda \tag{4.58}$$

则（4.57）式变成

$$\left(\frac{1}{3}\right)^q\lambda^2+\left(\frac{2}{3}\right)^q\lambda-1=0$$

即 $$\lambda^2+2^q\lambda-3^q=0 \tag{4.59}$$

故解得

$$\lambda=\frac{-2^q\pm\sqrt{2^{2q}+4.3^q}}{2} \tag{4.60}$$

由此求得

$$\tau(q)=\frac{\log\lambda_1}{\log 2}=\frac{\log(\sqrt{2^{2q}+4.3^q}-2^q)-\log 2}{\log 2} \tag{4.61}$$

那么

$$D_q=\frac{\tau(q)}{q-1}=\frac{\log(\sqrt{2^{2q}+4.3^q}-2^q)-\log 2}{(q-1)\log 2}$$

所以

$$D_0=\frac{\log(\sqrt{5}-1)-\log 2}{-\log 2}=1-\frac{\log(\sqrt{5}-1)}{\log 2}$$

当 $q\to+\infty$时，则$\left(\frac{2}{3}\right)^q\gg\left(\frac{1}{3}\right)^q$，故近似地有

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^q}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\tau(q)}}=1 \qquad (q\to+\infty)$$

故由（4.33）式得

$$\tau(q)|_{q\to+\infty}=\alpha_{min}\cdot q, \quad \alpha_{min}=\frac{\log\left(\frac{2}{3}\right)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)}$$

当$q\to-\infty$时，$\left(\frac{1}{3}\right)^q\gg\left(\frac{2}{3}\right)^q$，故近似地有

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^q}{\left(\frac{1}{4}\right)^{\tau(q)}}=1$$

故由（4.35）式得

$$\tau(q)|_{q\to-\infty}=\alpha_{max}\cdot q,\quad \alpha_{max}=\frac{\log\left(\frac{1}{3}\right)}{\log\left(\frac{1}{4}\right)}$$

至于$\alpha(q)$和$f(\alpha)$，可由（4.30）式和（4.29）式求得。

## §8 时间序列的多分维

将单位间隔分成三部分，每个部分长$r_i=\frac{1}{3}$，而相应的权重（或概率）为$P_1$，$P_2=1-2P_1$和$P_1$（且$P_2>P_1$）。下一步每个间隔再分成三等分，其中每个等分的概率同第一步。这样不断分下去，时间序列的非均匀性就表现出来，见图4.11。

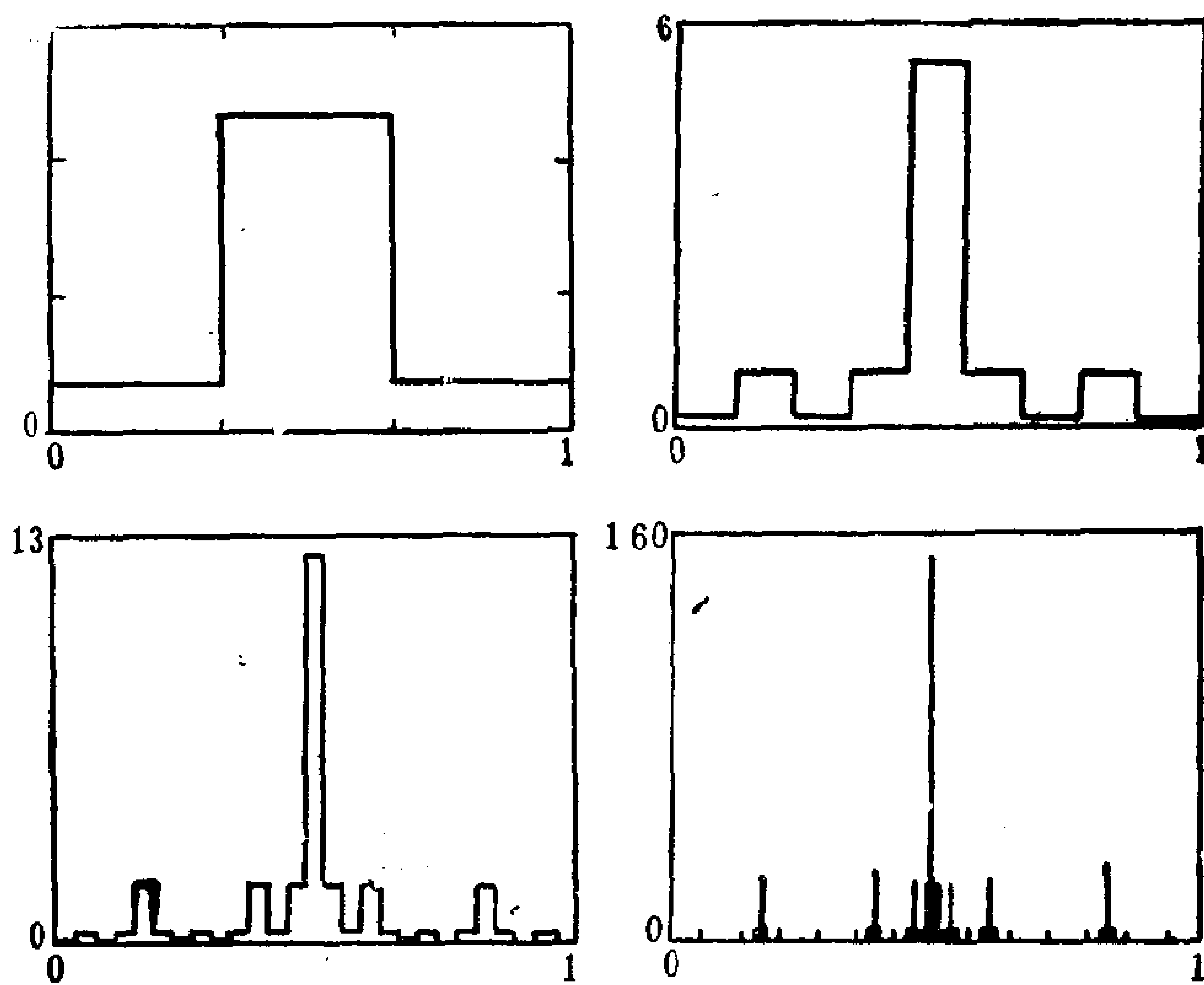



图4.11 带有非均匀分布的时间序列

按（4.42）式，

$$D_q=\frac{1}{1-q}\ \frac{\log(2P_1^q+P_2^q)}{\log 3} \tag{4.62}$$

那么，按（4.30）式

$$\alpha(q)=\frac{d[(q-1)D_q]}{dq}=\frac{1}{\log(1/3)}\ \frac{\log(2P_1^q\log P_1+P_2^q\log P_2)}{2P_1^q+P_2^q} \tag{4.63}$$

再由（4.29）式求得

$$f(\alpha)=\frac{1}{\log\left(\frac{1}{3}\right)}\left[\frac{2P_1^q\log P_1^q+P_2^q\log P_2^q}{2P_1^q+P_2^q}-\log(2P_1^q+P_2^q)\right] \tag{4.64}$$

图4.12是 $f(\alpha(q))$和$\alpha(q)$与$q$的依赖关系，而图4.13是$f(\alpha)$和$\alpha$的依赖关系。

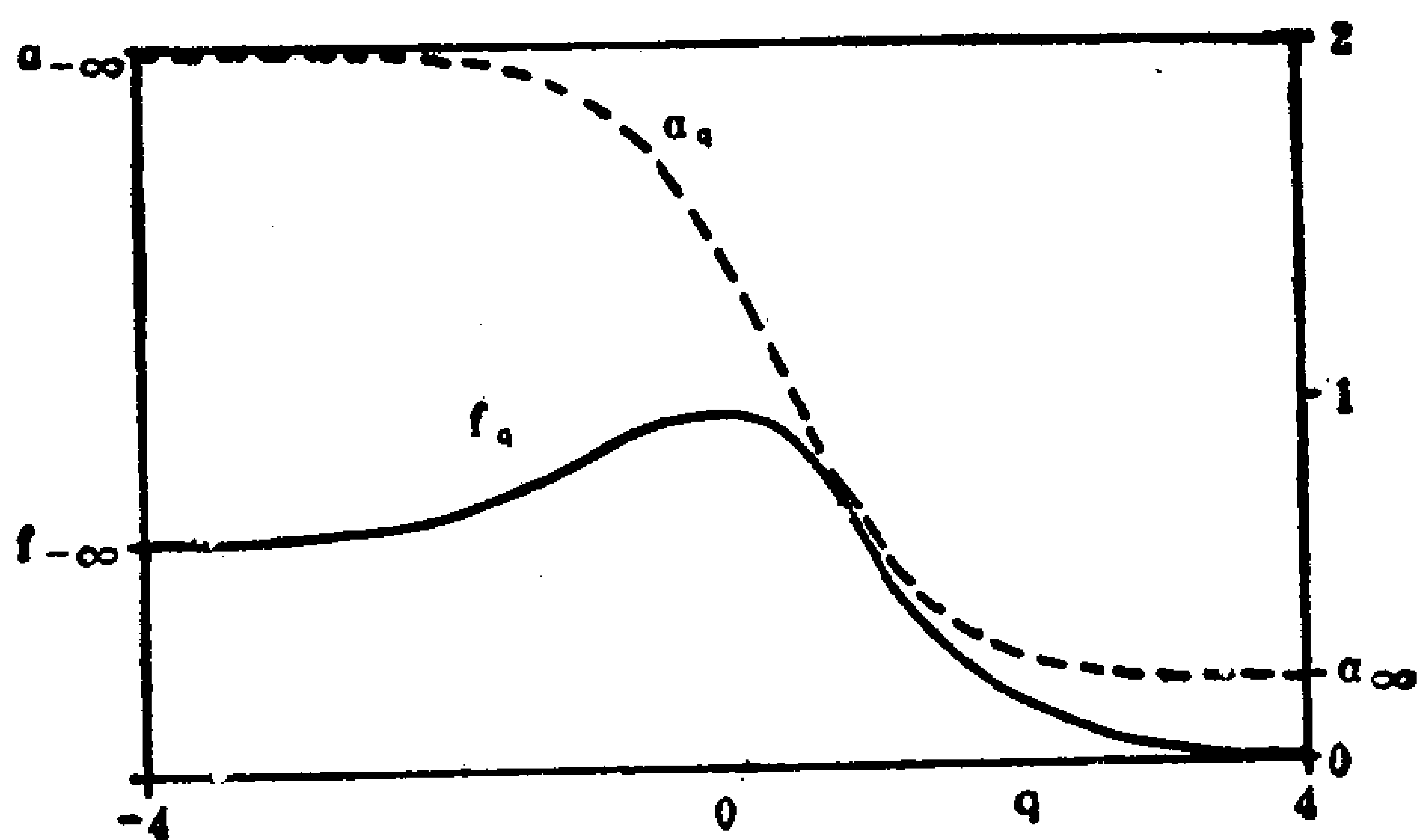



图4.12　浑沌序列$f$和$\alpha$与$q$的关系

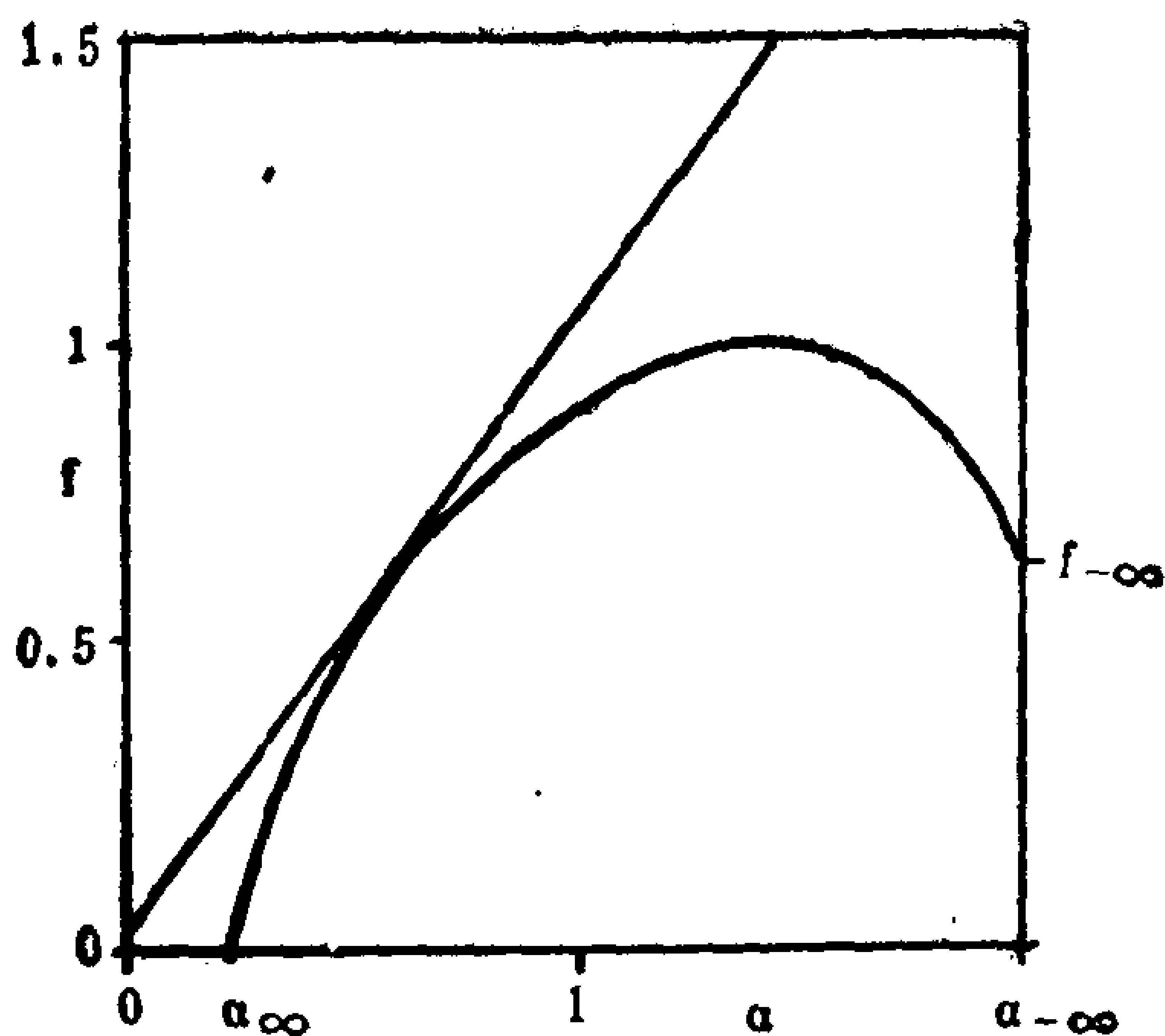



图4.13　浑沌序列$f(\alpha)$和$\alpha$的依赖关系

## §9　分层电阻网络

每个单位长度带分成六个带，它们的电压降分别为$V_1=\frac{1}{3}$，$V_2=\frac{1}{6}$。这种多次重复形成的过程是一个多分维的过程，见图4.14。

和§8类似，$D_q$可以表示为

$$D_q=\frac{1}{1-q}\frac{\log\left[2\left(\frac{1}{3}\right)^q+4\left(\frac{1}{6}\right)^q\right]}{\log3} \tag{4.65}$$

即电压降可以用多分维$D_q$来表示。

再由（4.30）式求得

$$\alpha(q)=\frac{d}{dq}[(q-1)D_q]=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^q\log\left(\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{6}\right)^q\log\left(\frac{1}{6}\right)}{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^q+2\left(\frac{1}{6}\right)^q\right]\log1/3}$$

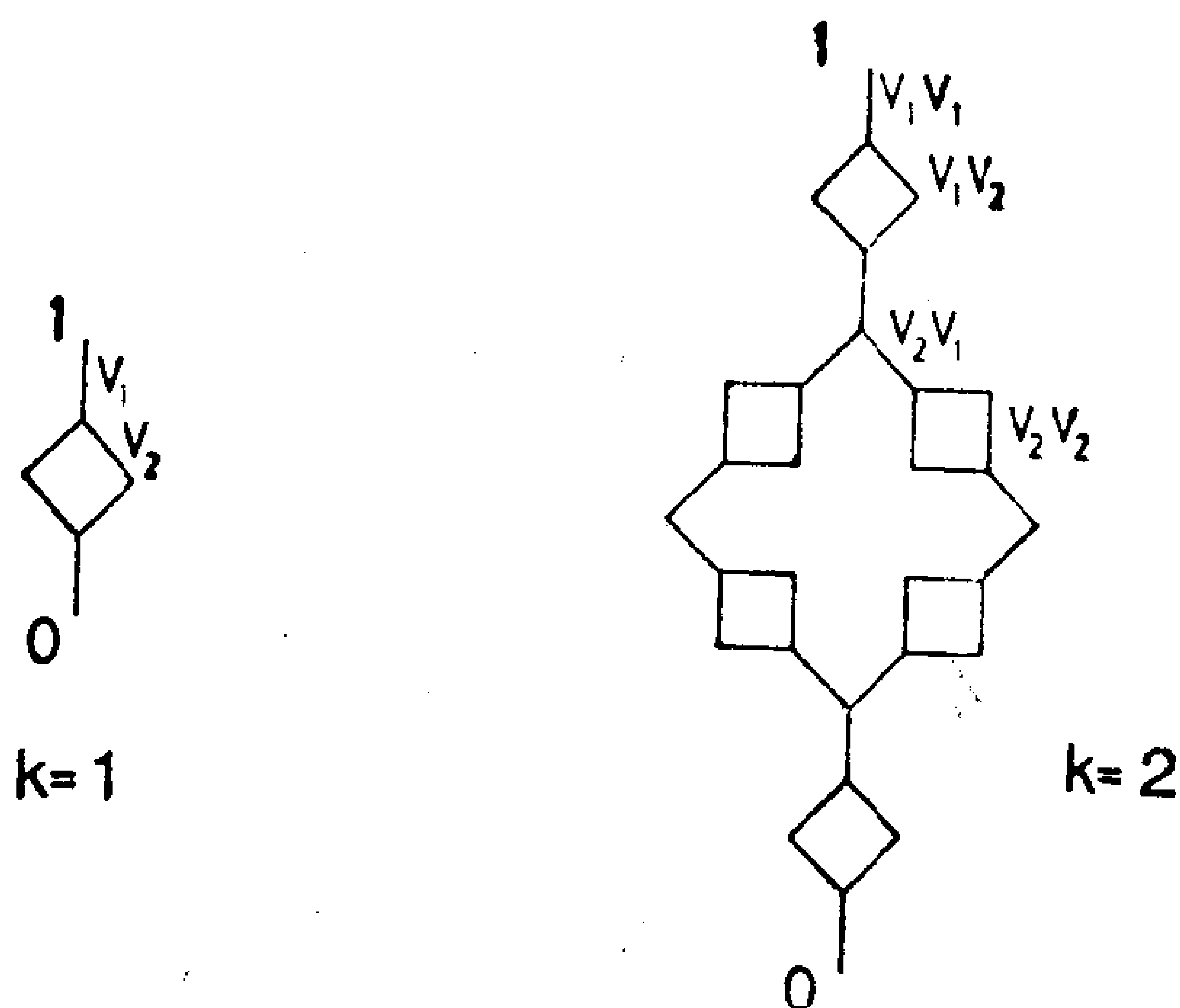



图4.14　分层电阻网络的多分维过程

$$=\left(2+\frac{1}{1+2^{q-1}}\right)\frac{\log 2}{\log 3}$$

由（4.29）式求得

$$f(\alpha)=\frac{(1+2^{q-1})(1+2^{1-q})\log 2+\log 2^{q}}{(1+2^{q-1})\log 3}$$

其中　$$D_0=\frac{\log 6}{\log 3}=1.6309$$

$$\alpha(+\infty)=2\frac{\log 2}{\log 3}=1.2619$$

$$\alpha(-\infty)=3\frac{\log 2}{\log 3}=1.8927$$

$$D_1=\frac{5}{2}\ \frac{\log 2}{\log 3}=1.5773$$

# §10 增长模型

图4.15是一维生长模型，第一步（$K=1$）是由三个质点，它们分别处在第1、3、4的位置上。第二步（$K=2$）是在第9和第16个位置中间将第一步的“种子”两倍放大构形，这个过程一直重复下去。这里我们常常不知道概率 $P_i$，但是我们知道质量分布。第$K$步生长的长度为$4^K$，那么可以用$2^K$作为盒子的尺寸。那么最密的盒子是最右边质量为$2^K$，按

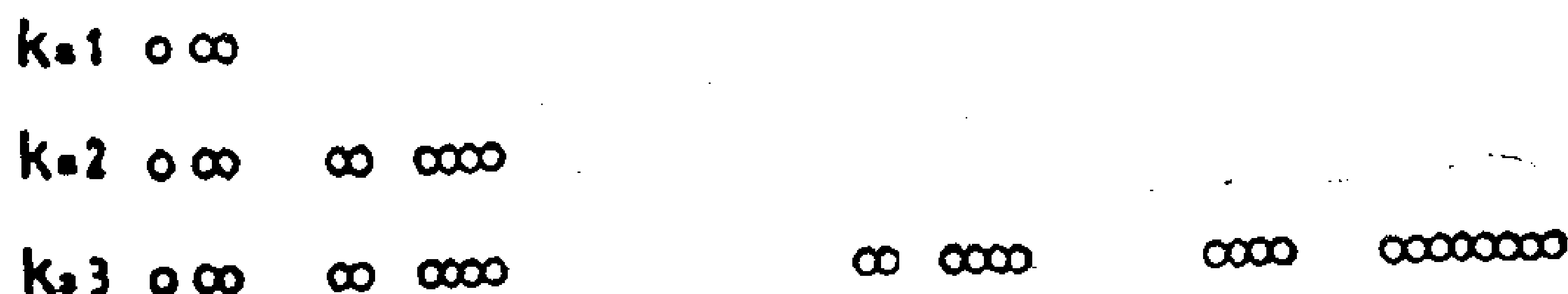



图4.15　一维生长模型的前几步

$$\frac{\text{非空盒子质量}}{\text{总质量}}=\left(\frac{\text{盒子尺寸}}{\text{总尺寸}}\right)^{\alpha} \tag{4.66}$$

那么

$$\alpha_{min}=D_{\infty}=\frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{\ln\left(\frac{2}{4}\right)}=0.585\cdots\cdots$$

$$\alpha_{max}=D_{-\infty}=\frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}=0.792\cdots\cdots \tag{4.67}$$

同样，按（4.19）式和（4.22）式有

$$\frac{K\text{步盒子数}}{(K+1)\text{步盒子数}}=\left(\frac{K\text{步盒子尺寸}}{(K+1)\text{步盒子尺寸}}\right)^{-D_0} \tag{4.68}$$

从图4.15看出，非空盒子数$F_K$是Fibonacci数，即$F_0=1$，$F_1=2$，……，$F_K=F_{K-1}+F_{K-2}$。

对于非空盒子数，在$K$很大时有

$$\frac{F_{K+1}}{F_K}\sim\text{黄金分割数}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1.618 \qquad (4.69)$$

故

$$D_0=\frac{\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{\ln 2}=\frac{\ln 1.618}{\ln 2}=0.694\cdots \qquad (4.70)$$

这例子说明$D_0$，$D_{\infty}$，$D_{-\infty}$还是好求的。至于$f(\alpha)$，可以理解为相同$\alpha$的盒子所形成的子集合的维数。理论上求出为

$$f(\alpha)=\left[(\alpha-\alpha_{min})\ln\left(\frac{\alpha-\alpha_{min}}{1-\alpha}\right)+2(\alpha_{max}-\alpha)\right.$$

$$\left.\ln\left(\frac{2(\alpha_{max}-\alpha)}{1-\alpha}\right)\right]\times\frac{1}{2\ln\left(\frac{1}{2}\right)(\alpha_{max}-\alpha_{min})} \qquad (4.71)$$

最后，再由（4.46）式求出$D_q$。

图4.16是二维生长模型，第$K$步是（$K-1$）步构形在四个角上两倍的放大。

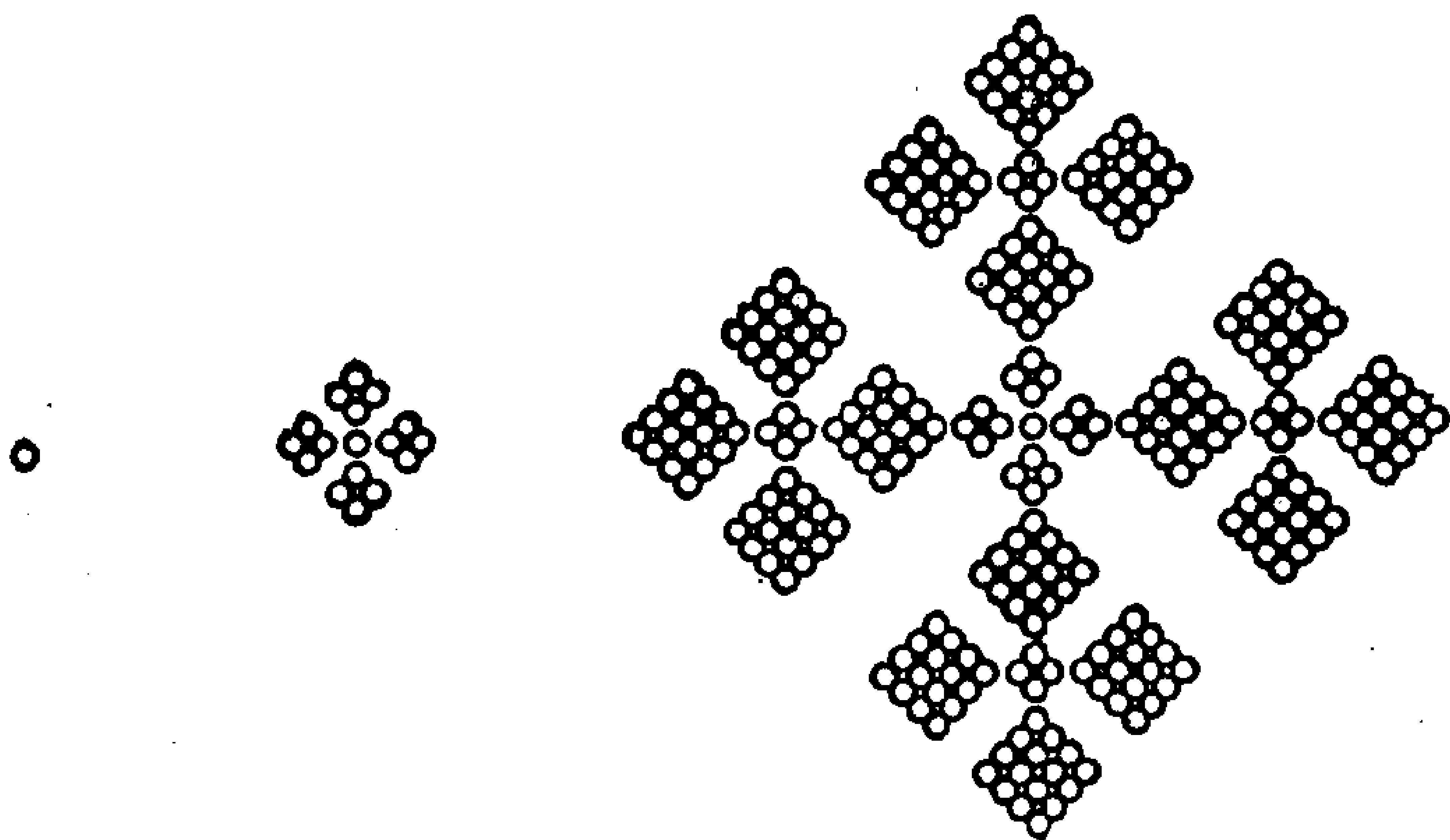


图4.16 二维生长模型

请注意，每一步由5个新的部分构成，其中中间的一部分和上一步构形相同，其它四部分是上一步构形的二倍放大。故在(4.20)式中

$$r_1=\frac{1}{5},\quad r_2=r_3=r_4=r_5=\frac{2}{5} \tag{4.72}$$

且

$$P_1=\frac{1}{17},\ P_2=P_3=P_4=P_5=\frac{4}{17} \tag{4.73}$$

故根据（4.20）式有

$$\frac{\left(\frac{1}{17}\right)^q}{\left(\frac{1}{5}\right)^{(q-1)D_q}}+4\frac{\left(\frac{4}{17}\right)^q}{\left(\frac{2}{5}\right)^{(q-1)D_q}}=1 \tag{4.74}$$

上式可以数值求解。但是对于$q\to\pm\infty$，明显地有

$$D_{\infty}=\frac{\ln\frac{4}{17}}{\ln\frac{2}{5}}=1.579 \tag{4.75}$$

$$D_{-\infty}=\frac{\ln\frac{1}{17}}{\ln\frac{1}{5}}=1.76\cdots \tag{4.76}$$

## §11 子波变换

前面，我们讨论的多分维是用奇异性指数$\alpha$及分布函数标度指数$f(\alpha)$来度量的。这里指数$\alpha$是按照图4.3中高度相同而归类的，高度不同，那么$\alpha$就不同。这种奇异性谱并不能表征奇异性发生的位置，尤其是一种信号（像湍流记录、地震记录）中含有各种大大小小不同的尺度时。我们关心的是两个问题：

（1）这些信号是由哪些尺度构成的？

（2）这些信号所反映的奇异性的位置在何处？对于前一个

问题，似乎用信号的傅里叶变换可以解决。但是若信号是分形结构，那么信号的功率谱是宽带谱，它最多告诉我们尺度的范围，并不能告诉我们信号的结构以及大大小小不同尺度的串级过程，它更不能解决奇异性的位置。现在，这两个问题可以通过子波变换来解决。

傅里叶变换的基本函数是$e^{i\omega t}$或$e^{ikx}$，其中$\omega$，$k$分别是频率或波数。现在，子波变换的基本函数是由解析子波$g(x)$通过位移和放大来构成的。为了把信号的奇异性能表现出来，$g(x)$的形状就类似于孤立波，在"孤立"点上$g(x)$最大。为了突出不同的尺度，我们可以采取不同的放大倍数。

图4.17是常用的墨西哥帽式的解析子波

$$g(x)=(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{4.77}$$

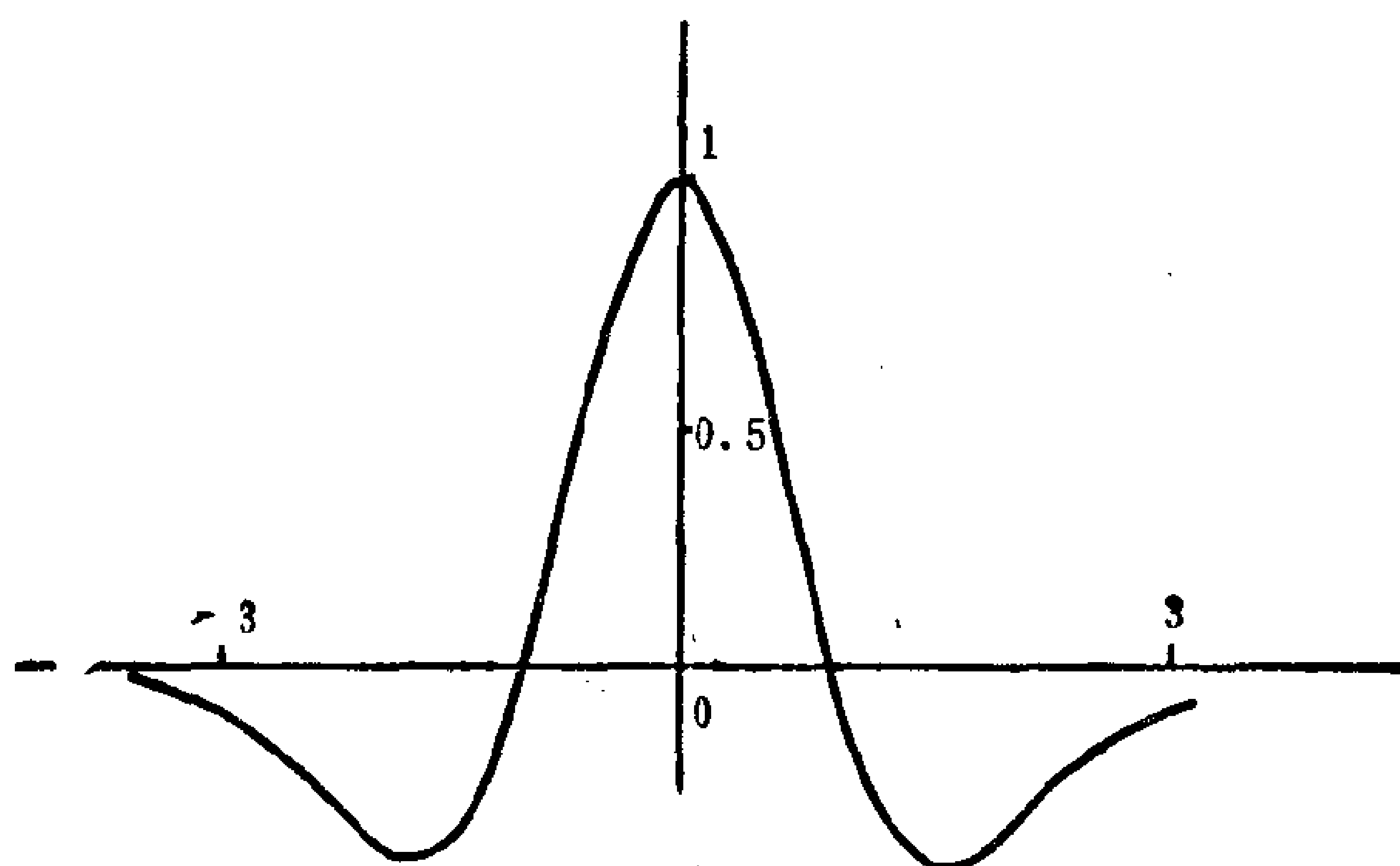



图4.17　墨西哥帽解析子波

我们把解析子波$g(x)$通过平移$x_0$（在该点$x_0$设有奇异性）和放大（放大倍数设为$a^{-1}$），就构成子波变换的基本函数

$$\frac{1}{a}\,g\left(\frac{x_0-x}{a}\right) \tag{4.78}$$

那么一个信号$S(x)$的子波变换$T_g(a,x_0)$，就是将一信号$S(x)$在

二个独立的量$a$，$x_0$上展现出来：

$$T_g(a,x_0)=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}S(x)g\left(\frac{x_0-x}{a}\right)dx \qquad a>0$$

(4.79)

解析子波$g(x)$满足下列条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dx=0 \tag{4.80}$$

(4.80) 式意味着平均值为零。

下面我们来说明，若信号$S(x)$具有标度指数$\alpha$，即

$$f_{x_0}(x)=S(x_0+x)-S(x_0)$$
$$=x^{\alpha(x_0)} \tag{4.81}$$

那么，它的变换$T_g(a,\ x_0)$也具有同样的标度指数。根据(4.79)式，则有

$$T_g(\lambda\alpha,\lambda x_0)=\frac{1}{\lambda\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}g\left(\frac{\lambda x_0-x}{\lambda\alpha}\right)S(x)dx$$

利用 (4.80) 式条件，上式又可以写成

$$T_g(\lambda\alpha,\lambda x_0)=\frac{1}{\lambda\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}g\left(\frac{\lambda x_0-x}{\lambda a}\right)[S(x)-S(o)]dx$$

(4.82)

令

$$x'=\frac{\lambda x_0-x}{\lambda a}$$

则 $x=\lambda(x_0-ax')$，$dx=-\lambda adx'$

故 (4.82) 式变为

$$T_g(\lambda a,\lambda x_0)=-\int_{+\infty}^{-\infty}g(x')f_0[\lambda(x_0-ax')]dx'$$

$$=-\lambda^{\alpha}\int_{\infty}^{-\infty}g(x')f_0(x_0-ax')dx'$$

同理令

$$X=x_0-ax',\ dX=-adx'$$

上式又变成

$$T_a(\lambda a,\quad \lambda x_0)=\lambda^a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a}g(X)f_{x_0}(X)dX$$

$$=\lambda^a T_a(a,x_0) \tag{4.83}$$

(4.83) 式意味着若固定$x_0$，那么子波变换也具有自相似性，它和信号$S(x)$有相同的标度指数，即 (4.83) 式的解为

$$T_a(a,\quad x_0)=a^{a(x_0)} \tag{4.84}$$

这样，在位置 $x_0$ 处的标度指数 $\alpha(x_0)$ 就可以在双对数坐标纸($\log T_a(a)$，$\log a$)上确定，图上直线的斜率就是这个$\alpha(x_0)$。

假如，由惯性区湍流资料求到的 $T_a(a,\ x_0)$ 随 $a$ 的变化见图4.18。

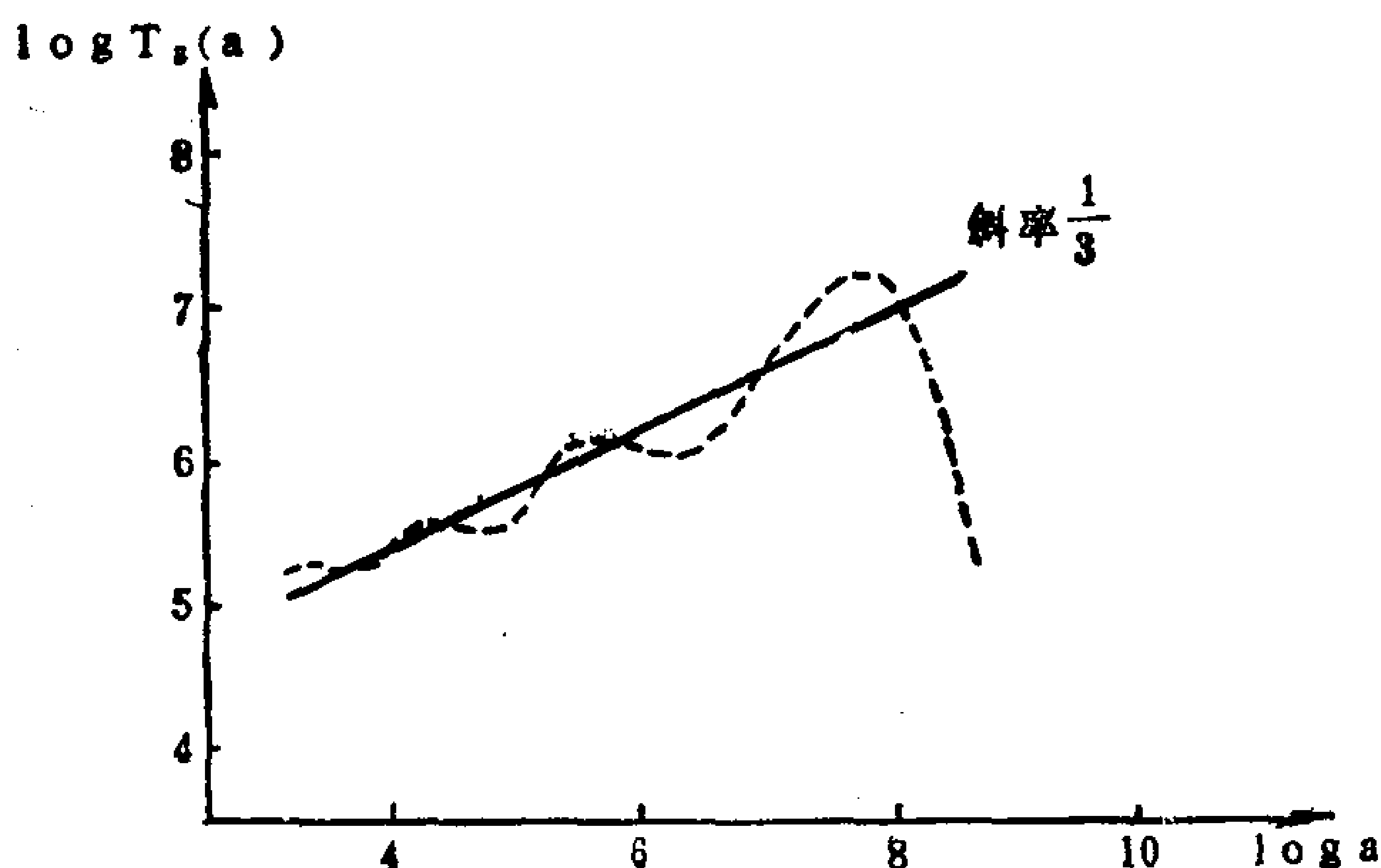



图4.18　子波变换随$a$的变化

通过曲线拟合直线（实线），其斜率就是 $\alpha=\frac{1}{3}$。这和Kolmogorov均匀各向同性湍流的结果 (4.18) 式很一致。

# 第五章　时间序列中的分维

前面几章我们已经知道分数维是反映耗散系统奇怪吸引子的结构或是描述该吸引子演化所必须的状态变量的最小数目。如果动力系统的数学描述是给出的话，那么变量数目是已知的，而且我们可以利用上两章有关分维的规律，求出吸引子的分数维，如二次映射的（3.36）式。但是实际问题常常给出的是单变量的时间序列，此时如何从该时间序列中找出反映在该序列中的吸引子的结构或分数维，是本章要解决的问题。

## §1　重建相空间

单变量的时间序列原则上讲是物理系统中各种要素相互作用的结果，因此它应该包含该动力系统的信息。

对一个$n$维动力系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2\cdots\cdots x_n)\end{cases} \tag{5.1}$$

因此（$x_1$，$x_2$，……，$x_n$）就是该系统状态空间的坐标。

也可以将（5.1）式微商化成为$n$阶的微分方程。

$$x_1^{(n)} = f(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, \cdots\cdots x_1^{(n-1)}) \tag{5.2}$$

此时状态空间的坐标就由（$x_1$，$\dot{x}_1$，$\ddot{x}_1$，……$x_1^{(n-1)}$）或（$\dot{x}_1$，$\ddot{x}_1$，……$x_1^{(n)}$）来代替，这种代替并不损失该动力系统演化的信息。

1981年法国科学家Ruelle提出用离散的时间序列 $x(t)$ 和它的连续漂移 $x(t+\tau)$，$x(t+2\tau)$，……，$x(t+(n-1)\tau)$ 来代

替（5.1），（5.2）式中的连续变数，其中$\tau$叫延滞参数（显然这种漂移运算就类似于连续变数的微分）。

例如一个单变量的时间序列

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3\cdots\cdots \tag{5.3}$$

若该序列的时间间隔为$\Delta t$，取$\tau$为$\Delta t$的整数倍，例如$\tau=1.\Delta t$时

$$\begin{cases}(x_0,\ x_1,\ x_2)\\(x_1,\ x_2,\ x_3)\\\cdots\cdots\cdots\\(x_{N-1},\ x_N,\ x_{N+1})\end{cases} \tag{5.4}$$

就形成三维空间中的$N$个点。又如$\tau=2\cdot\Delta t$时

$$\begin{array}{l}(x_0,\ x_2,\ x_4)\\(x_1,\ x_3,\ x_5)\\\vdots\\(x_{N-1},\ x_{N+1},\ x_{N+3})\end{array}$$

形成延滞时间为$\tau=2\Delta t$的三维空间的$N$个点。

这里$n$维空间的$n$叫嵌入相空间的维数，用嵌入相空间就代替了状态空间，$N$个点就形成该$n$维嵌入相空间的轨道，见图5.1。

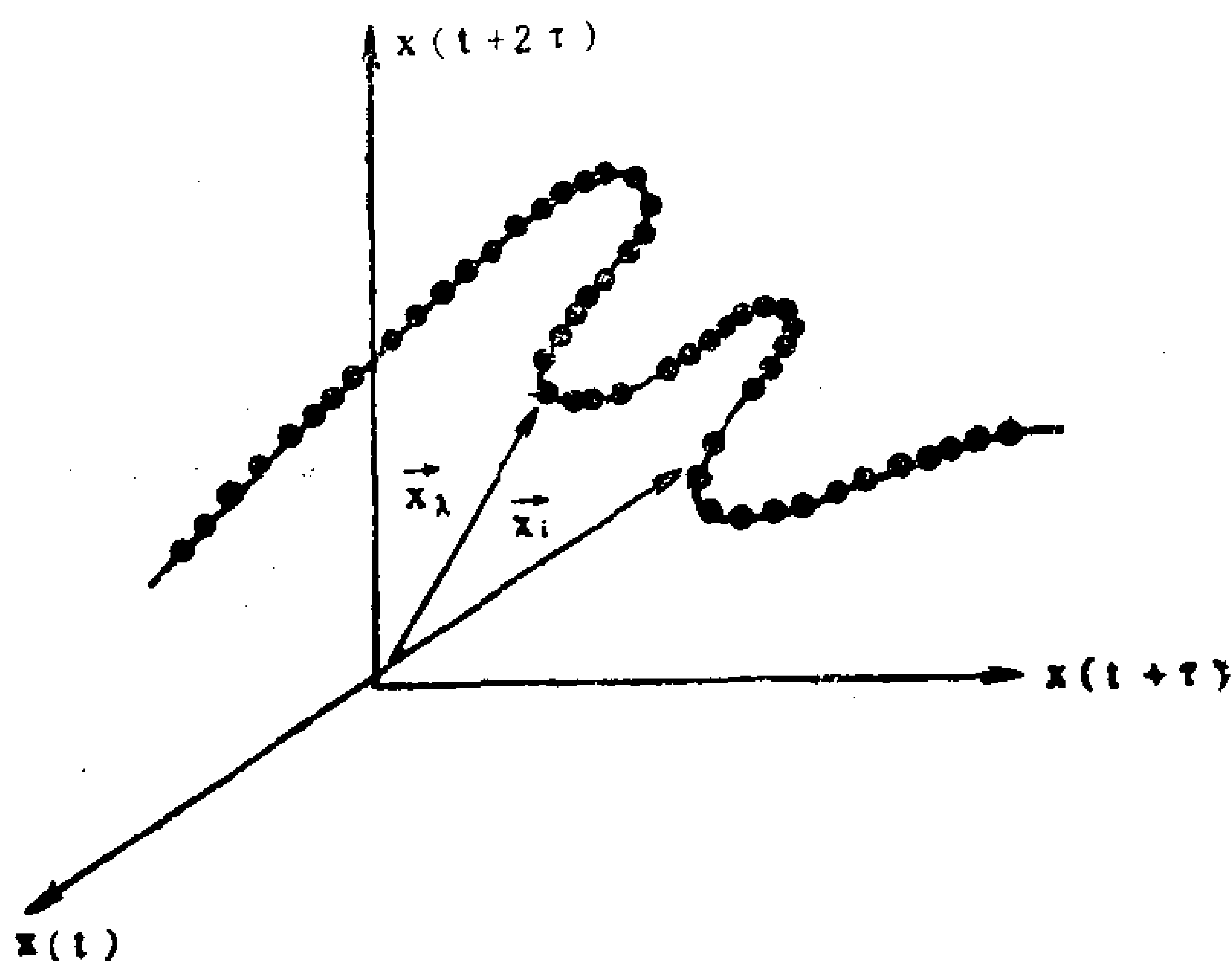



图5.1　$n$维嵌入相空间的轨道

显然在这重建的$n$维相空间中，其吸引子的维数$D$应小于$n$，当然为了保证该方法的成功，延滞时间$\tau$的选择应使构成$n$维相空间的每个分量是相互独立的。

## §2 嵌 入 定 理

从时间序列重建相空间的过程中，为了保证该相空间容纳该状态空间原来吸引子的拓扑特征，那么嵌入相空间的维数$n$究竟应该取多大呢？Whitney在1934年，后来Takens在1980年证明了嵌入空间维数大小的嵌入定理：如果原来吸引子处在一个$d_A$维空间中，那么其嵌入空间维数必须是$2d_A+1$。

对这个定理我们在此不予证明，只是加以说明。设集合$A$和$B$的维数分别是$d_A$和$d_B$，我们若问某交集$A\cap B$的维数$d_{A\cap B}$是多少？若把该问题放在$d$维空间来讨论，那么$A$、$B$和$A\cap B$集的余维分别是

$$d-d_A,\ d-d_B,\ d-d_{A\cap B}$$

余维有好的相加性质

$$(d-d_A)+(d-d_B)=(d-d_{A\cap B}) \tag{5.5}$$

或

$$d_{A\cap B}=d_A+d_B-d \tag{5.6}$$

（5.5）式的正确性，我们可以用几个例子来检验。

例1：两条曲线在平面上一般能相交吗？

因为两条曲线$A$和$B$分别都是一维，即$d_A=d_B=1$，平面的维数是$d=2$。按（5.6）式算得$d_{A\cap B}=0$。这就说明，两条曲线在平面上一般相交成点（其维数是零），这是一般不能借助于小的变形而去除的，即这两条曲线感到不“自由”。

例2：二条曲线在三维空间中能相交吗？

因为曲线$A$和$B$的维数分别是$d_A=d_B=1$，而$d=3$，则按（5.6）式算得$d_{A\cap B}=-1$，这就说明其交集的维数为负，即一般不相交。即使它们相交，通过无穷小的扰动也会不相交，也就是说这

种相交是偶然的。

例3：在三维空间中一条曲线和一个曲面能相交吗？

显然，$d_A=1$，$d_B=2$，$d=3$，则$d_{A\cap B}=0$，即一般相交于一个点。

现在我们应用（5.6）式到两个同样的对象$d_A=d_B$，我们希望象例2一样其交集是“自由”的，即$d_{A\cap B}=-1$，那么由（5.6）式得到

$$d=2d_A+1 \tag{5.7}$$

（5.7）式说明，嵌入空间的维数$n$一般至少应是吸引子维数的两倍。

## §3 相关维数的等价性

为了计算嵌入相空间奇怪吸引子的维数，我们随便给一个数$r$，然后在嵌入相空间中的$N$个点检查一下有多少“点对”（$x_i$，$x_j$）之间的距离小于$r$，把距离小于$r$的“点对”在一切“点对”（若有$N$个点，则共有$N^2$个“点对”）中所占的比例

$$c(r)=\frac{1}{N^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N}\theta(r-\|x_i-x_j\|) \tag{5.8}$$

记作$c(r)$，其中$\theta(x)$是亥维赛（Heaviside）函数，它定义为

$$\theta(x)=\begin{cases}1 & 当x>0\\ 0 & 当x<0\end{cases} \tag{5.9}$$

若$r$选得太大，当然一切“点对”的距离都不会超过它，因而$c(r)=1$，$\log c(r)=0$，因此函数$c(r)$描述了随$r$增加时，“点对”数（小于$r$的）是如何增长的分布函数。显然太大的$r$反映不了系统内部的性质。

适当缩小$r$，可能在$r$的一段区间内$c(r)$随$r$的变化为

$$c(r)=r^D \tag{5.10}$$

那么这里的$D$就是该吸引子的维数。例如均匀分布在一条线上的

资料点，则 $c(r)$ 与$r$的一次方成正比，即$D=1$。而均匀分布在一个面上的资料点，则 $c(r)$ 应和 $r$的二次方成正比，故$D=2$，见图5.2。因此$D$值具有描述该吸引子结构的特征。

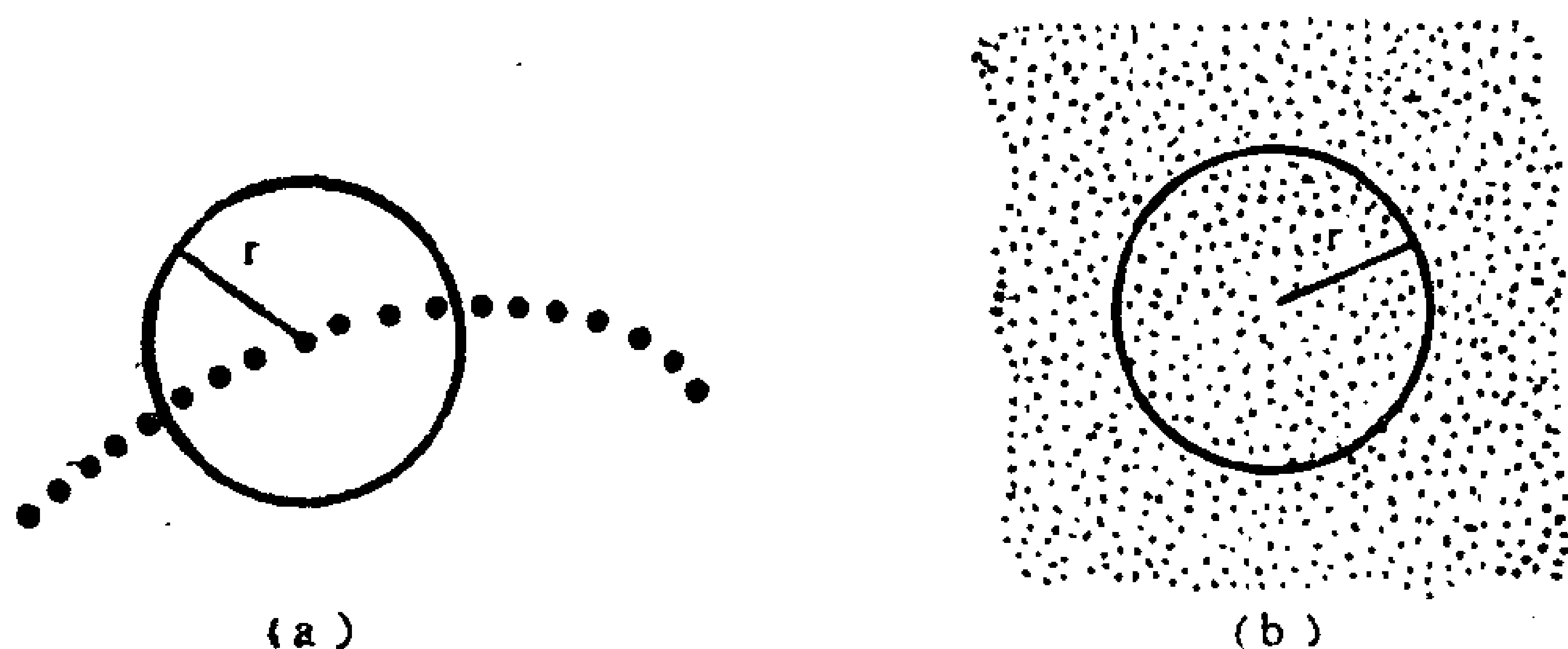



图5.2 维数计算的说明

(a) $c(r)\sim r^1$ (b) $c(r)\sim r^2$

下面我们将说明，由（5.10）确定出的$D$

$$D=\lim_{r\to 0}\frac{\log c(r)}{\log r} \tag{5.11}$$

就是（4.42）式所确定的相关维

$$D_2=\lim_{r\to 0}\frac{\log\sum_{i=1}^{N}P_i^2}{\log r} \tag{5.12}$$

我们设$n_i$是处在尺寸是$r$的第$i$个小体积元的点数，由于“点对”（$x_i$，$x_i$）按（5.8）式是不考虑的，且（$x_i$，$x_j$）和（$x_j$，$x_i$）是作为不同的“点对”，那么所有这$n_i$点就形成（$n_i^2-n_i$）个“点对”。故按（5.8）式有

$$\begin{aligned}c(r)&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}(n_i^2-n_i)\\&=\sum_{i=1}^{N}\lim_{N\to\infty}\frac{n_i^2}{N^2}-\lim_{N\to\infty}\frac{n_i}{N^2}\\&=\sum_{i=1}^{N}P_i^2-\lim_{N\to\infty}\frac{n_i}{N^2}\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} P_i^2 \qquad (5.13)$$

（5.13）式说明，（5.11）式和（5.12）式右边的分子都是相同的。

若是单分维的均匀分布，按（4.46）式由（5.11）式计算出的$D$不但是相关维，而且也是$D_0$和信息维$D_1$以及所有的$D_q$。

还应该指出，用时间序列计算分数维$D$，需要足够的点数$N$，一般有下列估计式

$$D < 2\frac{\log N}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \qquad (5.14)$$

如果$r=0.1$则$D<2\log N$，例如$N\sim10^3$，则算得的维数$D$最大是6。

还要说明在（5.8）式中$r$的数值也不能取得太小，如果取值太小，系统中一切偶然的噪声都会表现出来。由于噪声在任何一维上都起作用，嵌入的$d$维相空间中就会测得$D=d$。因此按(5.4)式给定一个嵌入空间维数$d$，在$\log c(r)$对于$\log r$的图上，若有一段是直线，则该线的斜率就是$D_2$，见图5.3。然后将嵌入空间维数$d$增加，按同样的办法在双对数坐标（$\log c(r)$，$\log r$）上计算$D_2$，直到$D_2$达到饱和为止。图5.4给出嵌入空间维数$d$和$D_2$

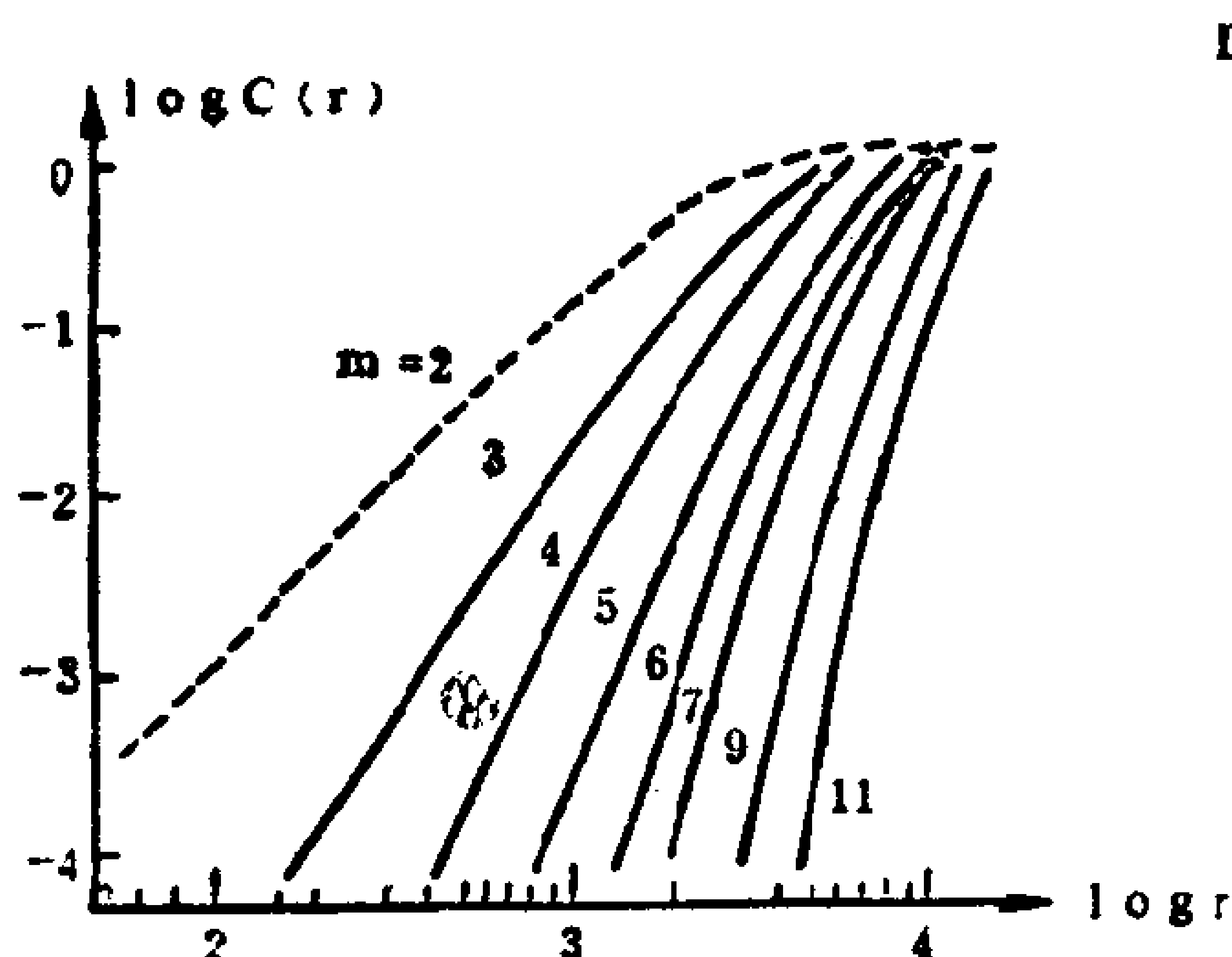



图5.3　在双对数坐标纸上求$D$

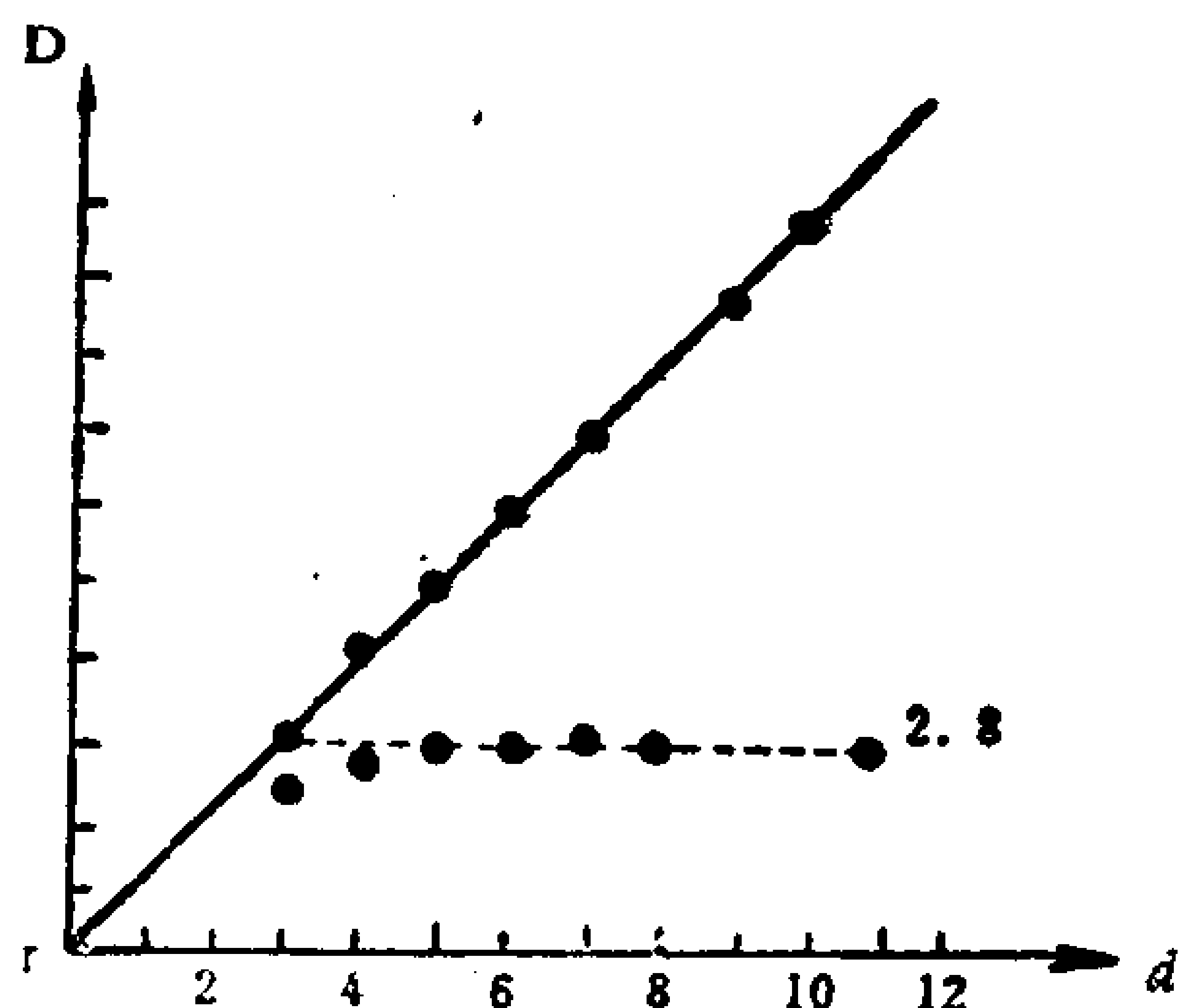



图5.4　$D$和嵌入维数$d$的关系

的关系，由图5.4看出，$d=5$时$D_2$已达到饱和值，即$D_2=2.8$，这时的$D_2$就反映了该时间序列所表现的浑沌吸引子的结构。$D_2$值达到饱和时的$d$值（图5.4中是$d=5$）表示描述该吸引子所需的最小的变量个数。

## §4 可预报性

浑沌和分数维的发现，使我们能从一个似乎是杂乱无章的时间序列中计算出它的分数维，表征其结构。同时我们还可以从一个时间序列中得到有关可预测值的信息。

对于天气预报，人们曾经设想用电子计算机去计算流体力学运动方程组由初条件去作客观的预测。随着电子计算机和卫星技术的成熟，人们充满着对天气预报的希望。然而1961年Lorenz在计算机上发现，从几乎相同的初始条件开始，但产生的计算机天气模式差别愈来愈大，最终毫无相似之处。这是什么原因呢？连著名的计算机之父V.Neumann也未想到，这正是非线性系统浑沌的特征——敏感的条件。难怪目前设在英国里丁的欧洲数值预报中心也得承认，世界上最好的长于两三天的预报也仅仅是推测而已，超过6天或7天的预报则毫无价值。图5.5是Lorenz从两组几乎相同初条件出发的打印结果。Lorenz把这种性质称为"蝴蝶效应"，即一只蝴蝶在巴西扇动翅膀会在德克萨斯引起龙卷风，或者称为长期预报的不可预测性。

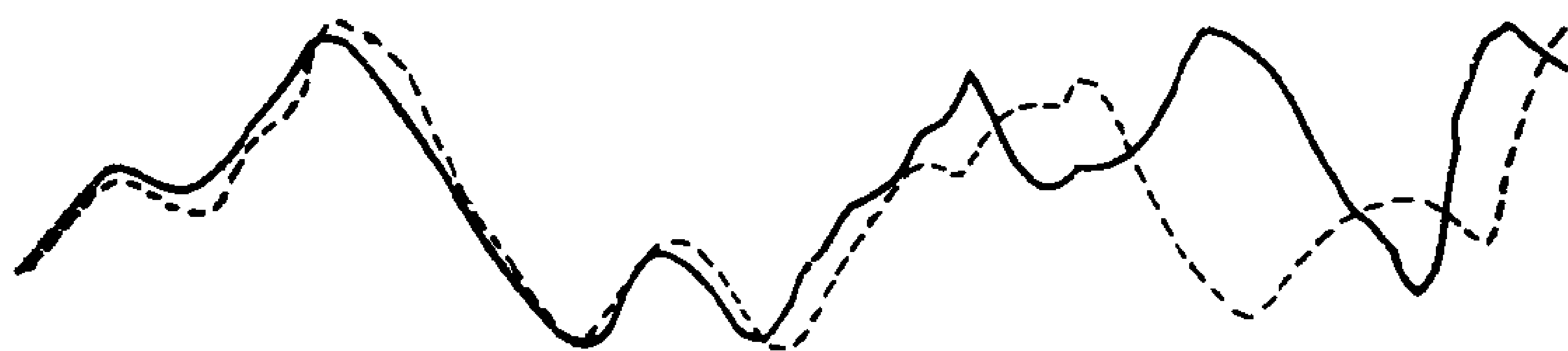


图5.5 Lorenz吸引子对初始条件的敏感性

如何量度敏感初条件这个性质呢？这就是第三章§6所谈到的Lyapunov特征指数。对一个$m$维动力系统

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}) \tag{5.15}$$

初始条件的误差$\delta\vec{x}_0$随着时间的演化而导致的轨道的误差$\delta\vec{x}$应满足如下方程

$$\delta\dot{\vec{x}} = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{\vec{x}_0}\delta\vec{x}_0 \tag{5.16}$$

经过$\tau$时刻以后，$\delta\vec{x}$可以表示为

$$\|\delta\vec{x}\| = \|\delta\vec{x}_0\| e^{LE\cdot\tau} \tag{5.17}$$

那么Lyapunov特征指数$LE$就定义为

$$LE = \frac{1}{\tau}\ln\frac{\|\delta\vec{x}\|}{\|\delta\vec{x}_0\|} \tag{5.18}$$

显然$LE>0$就反映$\tau$时刻内轨道的平均辐散率，这就是敏感初条件的定量表述。

对于重建在嵌入$m$维相空间的轨迹时间序列，若固定$r$时，时间长度为$m\tau$的两条相距小于$r$的辐射轨迹，下一步时间$\tau$后它们保持在$r$内的机会就下降，而保持在$r$球内机会的平均“点对”数正比于$c_m \sim e^{-m\tau\cdot LE}$，故由（5.10）式分布函数就由

$$c_m(r) \sim e^{-m\tau\cdot LE} \tag{5.19}$$

变到

$$c_{m+1}(r) \sim e^{-(m+1)\tau\cdot LE} \tag{5.20}$$

则

$$LE = \frac{1}{\tau}\ln\frac{c_m}{c_{m+1}} \tag{5.21}$$

广义上讲，一个奇怪吸引子可以有多个正的Lyapunov特征指数，那么类似（5.19）和（5.20）式中的$LE$就改成$\sum\limits_{i=1} LE_i = K_1$，$K_1$叫Kolmogorov熵。此时（5.21）式就由求$LE$变成求$K_1$，为

了求平均的时段更准确一些，嵌入相空间维数由$m$增加到$m+k$，则$K_1$的计算公式为

$$K_1=\frac{1}{k\tau}\ln\frac{c_m}{c_{m+k}} \tag{5.22}$$

按照（5.17）式，当时间$\tau=\frac{1}{LE}$时，轨道误差$\|\overrightarrow{\delta x}\|$就是初始误差$\|\overrightarrow{\delta x_0}\|$的$e$倍，所以通常把

$$\frac{1}{LE}\text{ 或 }\frac{1}{K_1} \tag{5.23}$$

叫做可预报的最大时间尺度。

应该指出这里的可预报的最大时间尺度是指轨道意义上而言的，并非说在此时刻以后就谈不上预报。长期预报是不行的也是指轨道意义上而言的。但是长期预报关心的往往是物理量的统计性质，因此长期预报更多的是统计意义上讲的。浑沌和分维的发展，不但不会更相信“长期预报不可预测”，而会对长期预测更加深我们对事物的认识。

## §5 信息、熵和层次

第四章中我们曾提到信息维 $D_I=\frac{I_1}{\log\frac{1}{r}}$，其中$I_1$就是Shannon信息

$$I_1=-\sum_i P_i\log P_i \tag{5.24}$$

信息的含义是对一个事件惊奇性的测度，$P_i$是该事件可能结果的概率。

这个定义告诉我们，对一个事件事先知道得愈少，那么就包含更多的信息。如果有完全确定的结果（即$P_i=1$），则信息量为零。

上节我们谈到浑沌敏感初条件的性质用正的Lyapunov特征指数描述。从信息的观点看，设最初初始条件的误差是$\pm r$,由于正Lyapunov指数使误差$r$增加，因而分辨率降低，$P_i$加大，信息量变小，因而初始条件的信息丧失，系统成了信息源。在一段$T$时刻内，轨道的偏离保持在$\pm r$内的信息量由两部分组成：(1)初始时刻的信息量$I_1$（2）$T$时刻内的信息流率$K_1$，故

$$I = I_1 + K_1 T$$

$$= D_1 \log \frac{1}{r} + K_1 T \qquad (5.25)$$

由（5.25）看出，分数维$D_1$与信息$I_1$成正比，是信息的量度，而Kolmogorov熵$K_1$是信息流率。

信息概念和维数,Kolmogorov熵有了（5.25）式联系以后，比较抽象的熵的概念就比较容易理解了。浑沌和其它复杂系统一样由于有伸长和折迭，必然形成大大小小不同尺度的层次结构。生物系统有细胞、器官、机体、种群等层次。气候系统有大大小小不同时间尺度的层次，上至千年万年，下至年、季、月。人脑有不同功能的神经元群构成的层次，有的管事物形状的，有的管颜色的，有的管强度的。

对多层次系统的认识，我们有如下体会：从低层次上看，事物有许多不确定的因素，但是从高层次上看，事物就比较容易确定了。几千人组成的大型团体操，从低层次（个人的动作）来看是杂乱无章的，但从高层次（如看电视）上看多种多样美丽的图案展现在面前。一个盒子中的空气，从分子的微观层次上看，分子是杂乱无章运动的，但是从宏观层次上看盒子中的空气是非常均匀的。Boltzman就是假设有$N$个可能的微观状态，那么Boltzman熵。

$$S = k \log N \qquad (5.26)$$

这个宏观量就确定了这种微观上的不确定性或复杂程度，其中$k$是Boltzman常数。

若设$N$个微观状态，而每个状态出现的概率又相等，都是$P_i = \frac{1}{N}$，则（5.26）式又可以改写成

$$S = -k\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\log\frac{1}{N}$$

$$= -k\sum_{i=1}^{N}P_i\log P_i \qquad (5.27)$$

这和信息（5.24）式和（4.40）式有同样的含义。显然微观层次上的种类$N$愈大，概率$P_i$就愈小，那么熵$S$或信息就愈大。

对于抛掷硬币有两种（$N=2$）可能的结果，抛掷骰子则有六种（$N=6$）可能的结果，显然后者不确定性的程度大，所以信息熵$I_1$和Boltzman熵$S$一样是系统不确定性的一种量度。(5.27)式把两个层次之间用式子联系起来。$I_1$或$S$是$-\log P_i$的平均值。即从低层次看是非常不确定的，但是从高层次上看，平均起来就比较确定的了。

第三章§7我们谈到浑沌迭代映射，每迭代一次初始条件的信息熵丧失1bit，最终初始条件的信息丧失夷尽，由于这种敏感初条件的结果，宏观上的浑沌轨道的不确定性增加了。但是从巨观上看浑沌却有美丽的结构。分子浑沌中微观上不确定性是由宏观上的熵（5.27）来量度的，宏观浑沌中宏观上不确定性则是由信息流率Kolmogorov熵$K_1$来量度。对一维映射（3.60）式，$K_1$就是Lyapunov特征指数

$$LE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log|f'(x_i)| \qquad (5.28)$$

分子浑沌的不确定性由Boltzman熵来量度，宏观浑沌的不确定性由Kolmogorov熵来量度。两者都叫熵，但前者是信息，后者是信息流率。因而两者单位也不同。

## §6 信息压缩

前面我们已经看到从单变量的时间序列可以求到信息（维）和信息流率（$K$熵）。由于多层次的结构，一个单变量时间序列可以通过平滑的办法来区分不同层次，而且高层次将低层次的信息进行压缩。

多层次结构必然要进行信息压缩这一点是清楚的，一个$d$维物体由于Lyapunov指数有正有负，正的指数反映局部不稳定，指数和是负反映耗散系统相空间体积收缩，即整体上的稳定性。这种局部不稳定而整体稳定，必然要进行“伸长”和“折迭”，使得多层次结构的浑沌吸引子的维数$D$要小于$d$，即

$$D<d \tag{5.29}$$

这就是说信息进行了压缩。

一个时间序列求其维数$D$是指该时间序列中含有各种各样的尺度，若改变尺度（或称粗视化），并不改变其维数。即局部和整体相似。将小尺度加以放大，完全自相似。

图5.6自下而上是从$D=2$（即$\beta=1$）逐步地加以平滑的结果，这些曲线看起来很相似，但是它们的分维结构并不相同。这是什么原因呢？

一个时间序列 $x(t)$ 是浑沌的，杂乱无章的。但若对其进行傅氏变换$\hat{x}(f)$，并求到其功率谱$S(f)$却是有规则的，因

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{x}(f)e^{ift}df \tag{5.30}$$

故功率谱

$$S(f)=|\hat{x}(f)|^2\sim f^{-\beta} \tag{5.31}$$

已经证明功率谱指数$\beta$和分数维$D$之间的关系为（2.42）式

$$\beta=5-2D \tag{5.32}$$

对一个时间序列 $x(t)$ 微分或积分会带来什么结果呢？

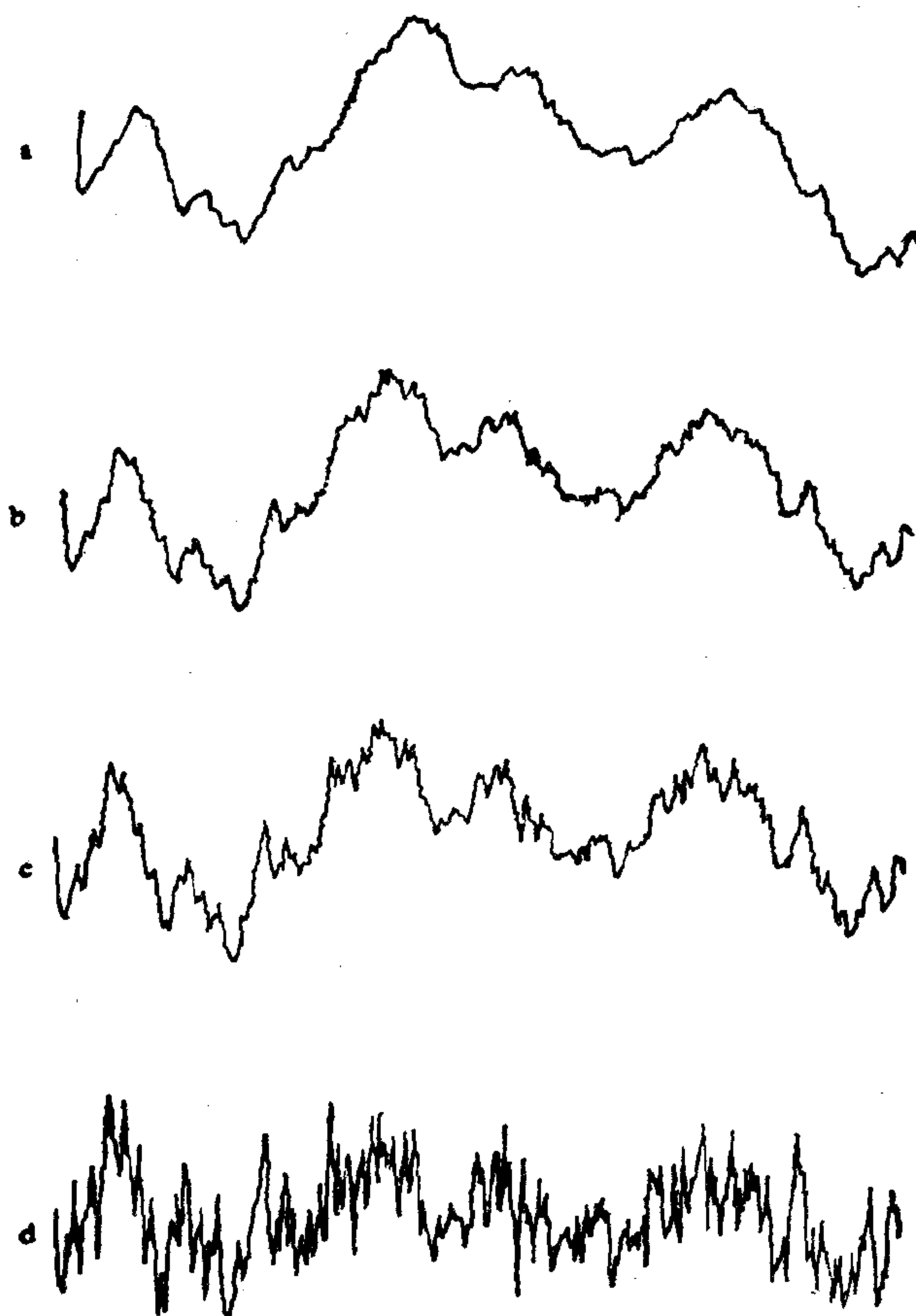



图5.6 用非整数积分自上而下改变曲线的维数
(自下而上维数$D$分别为2.0，1.5，1.25，1.0)

将（5.30）微分$n$次有

$$\frac{d^n x}{dt^n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(-if)^n\hat{x}(f)e^{ift}df \qquad (5.33)$$

由（5.31）式和（5.33）式看出，$n$次微分后的时间序列其功率谱为

$$S^{(n)}(f)\sim f^{-\beta+2n}=f^{-(\beta-2n)} \qquad (5.34)$$

根据$\beta$和$D$的关系（5.32）式，功率谱指数由$\beta$降为$+\beta-2n$，相应的维数$D$要增加。反之，对积分而言$n<0$，谱指数$\beta$增加，相应的维数要减小。

滑动平均就相当于积分，它必然要将时间序列的高频成分滤掉而加强低频成分，因而功率谱指数$\beta$增加，分数维$D$要减少。因此平滑的结果必然是使分维$D$减少，即改变了时间序列的结构，压缩了信息，曲线愈来愈光滑。

图5.6（d）是布朗运动噪声，其功率谱指数$\beta=2.0$，那么按（5.34）式$-\beta+2\cdot1=-2+2=0$，即它的差值（或微分）的能谱指数$\beta=0$，即是白噪声。所以白噪声$w(t)$可以看成是布朗运动噪声$x(t)$的微商，或布朗运动噪声可以看成是白噪声的积分：

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+}w(t)dt \tag{5.35}$$

## §7 分数维布朗运动

大家知道，布朗运动是分子的随机运动，因而它不象雪花曲线，Sierpinski海绵，Jnlia集等分形现象，这些现象可以将其一部分加以放大就成为整体或者通过迭代映射得到。我们常把后者叫确定性的分形，而把分子随机的布朗运动叫随机分形。随机分形对模拟实际的自然现象有很大意义。

从物理上知道，分子布朗运动粒子位置$x(t)$的概率分布是正态分布，即

$$P(x(t))=\frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}}e^{-\frac{x^2}{4\nu t}} \tag{5.36}$$

且位置的方差和$t$成正比，即

$$\overline{[x(t_2)-x(t_1)]^2}\propto|t_2-t_1| \tag{5.37}$$

正态分布（5.36）有一很重要的性质，将（5.36）作尺度变换

$$x\to\lambda^{\frac{1}{2}}x,\quad t\to\lambda t \tag{5.38}$$

则满足如下的标度律

$$P(\lambda^{\frac{1}{2}}x,\ \lambda t)=\lambda^{-\frac{1}{2}}P(x,\ t) \tag{5.39}$$

且在（5.38）变换下总概率不变

$$\int_{-\infty}^{+\infty}P(x,\ t)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}P\ (\lambda^{\frac{1}{2}}x,\lambda t)d(\lambda^{\frac{1}{2}}x)$$
$$=1 \tag{5.40}$$

（5.40）式说明了 $x(t)$ 和$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x(\lambda t)$有相同的概率分布。这就是所谓统计上是自相似的。虽然在坐标（$P(x,t)$，$x$）图上看，不同的$t$其正态分布的形式是不同的，见图5.7（a），但是它们具有统计上的自相似性，即在坐标$\left(\frac{P(x,t)}{t^{-\frac{1}{2}}},\ \frac{x}{t^{\frac{1}{2}}}\right)$图上却是同一个正态分布，见图5.7（b）。

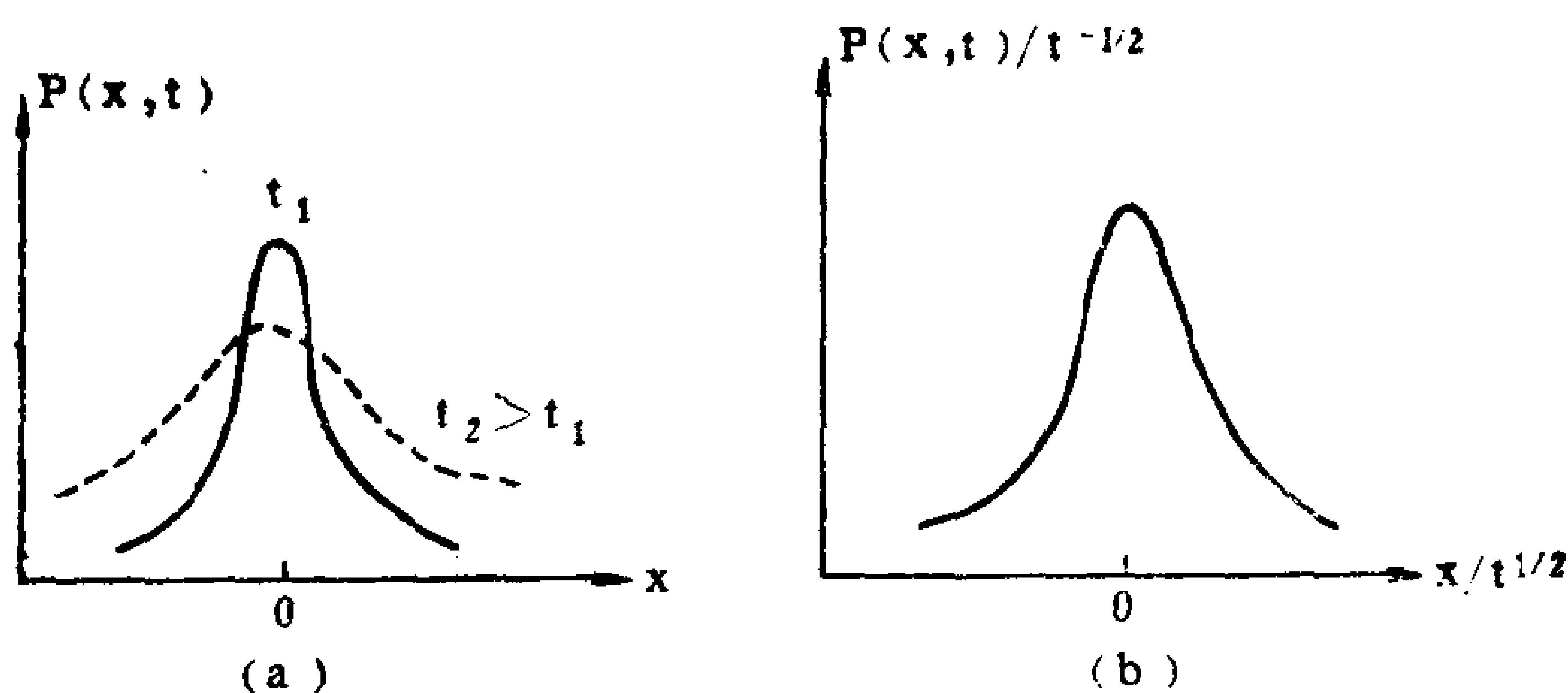



图5.7　布朗运动的统计自相似性

图5.8中列出未重新标度（$\lambda=1$）的布朗运动和重新标度（$\lambda$从$\frac{1}{8}$到8）布朗运动的图，随着标度因子$\lambda$的加大，说明布朗运动愈加速。

将（5.37）式推广到一般情况

$$\overline{[x(t_2)-x(t_1)]^2}\propto|t_2-t_1|^{2a} \tag{5.41}$$

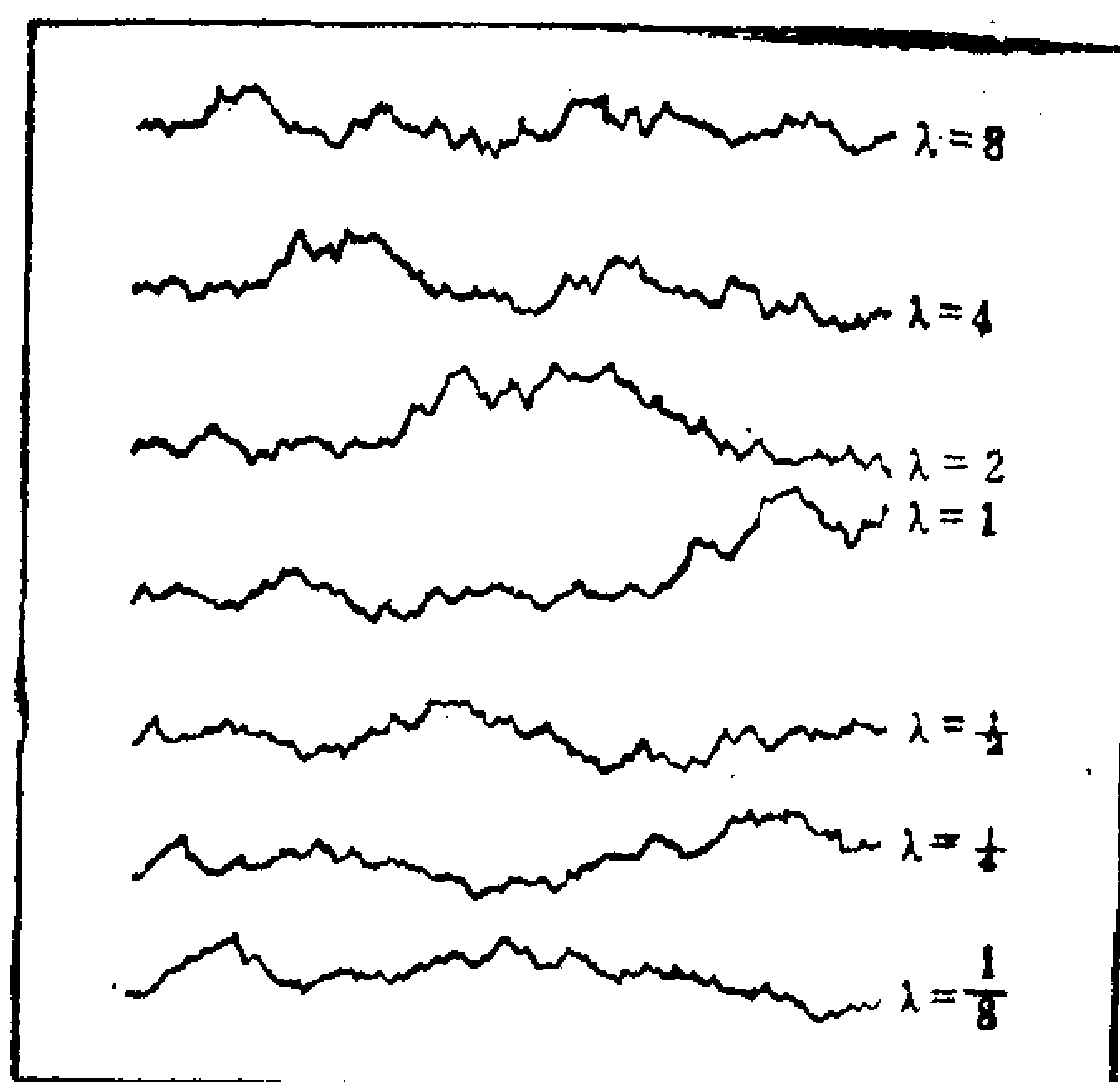



图5.8　重新标度的布朗运动

其中　　　　$0<\alpha<1$　　　　(5.42)

这就叫分数维布朗运动。

和布朗运动同样，对分数维布朗运动$x(t)$和$\frac{1}{\lambda^{\alpha}}x(\lambda t)$有相同的概率分布，或统计上是自相似的。

因为

$$\overline{[x(t)-x(-t)]^2}=2\overline{x^2(t)}-2\overline{x(t)x(-t)} \quad (5.43)$$

所以相关系数

$$R=\frac{\overline{-x(t)x(-t)}}{\overline{x^2(t)}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{[x(t)-x(-t)]^2}-\overline{x^2(t)}}{\overline{x^2(t)}} \quad (5.44)$$

故

$$R=\frac{\frac{1}{2}(2t)^{2\alpha}-t^{2\alpha}}{t^{2\alpha}}=2^{2\alpha-1}-1 \quad (5.45)$$

由（5.44）式看出，当标度指数$\alpha=\frac{1}{2}$时（即布朗运动），相关系数$R=0$，即$x(t_2)-x(t_1)$和$x(t_3)-x(t_2)$在概率意义上（$t_1<$

$t_2<t_3$）是独立的。但是当$\frac{1}{2}<\alpha<1$时，相关系数$R>0$，即正相关。而当$0<\alpha<\frac{1}{2}$时，$R<0$，即为负相关。

应当注意（5.44）式的相关系数同传统的物理系统的相关系数假设是矛盾的。对于后者，通常假设随着$t$增加到无穷，相关系数减为零。但是对于象相变这一类临界现象，在临界点附近或$t\to\infty$，其相关系数总是具有$t$（或距离）的标度性质的。相关系数的数值虽小，但还不能将其略去。

图5.9（a）是对$\alpha=0.2$重新标度的分数维布朗运动曲线，5.9（b）是$\alpha=0.8$重新标度的分数维布朗运动曲线。

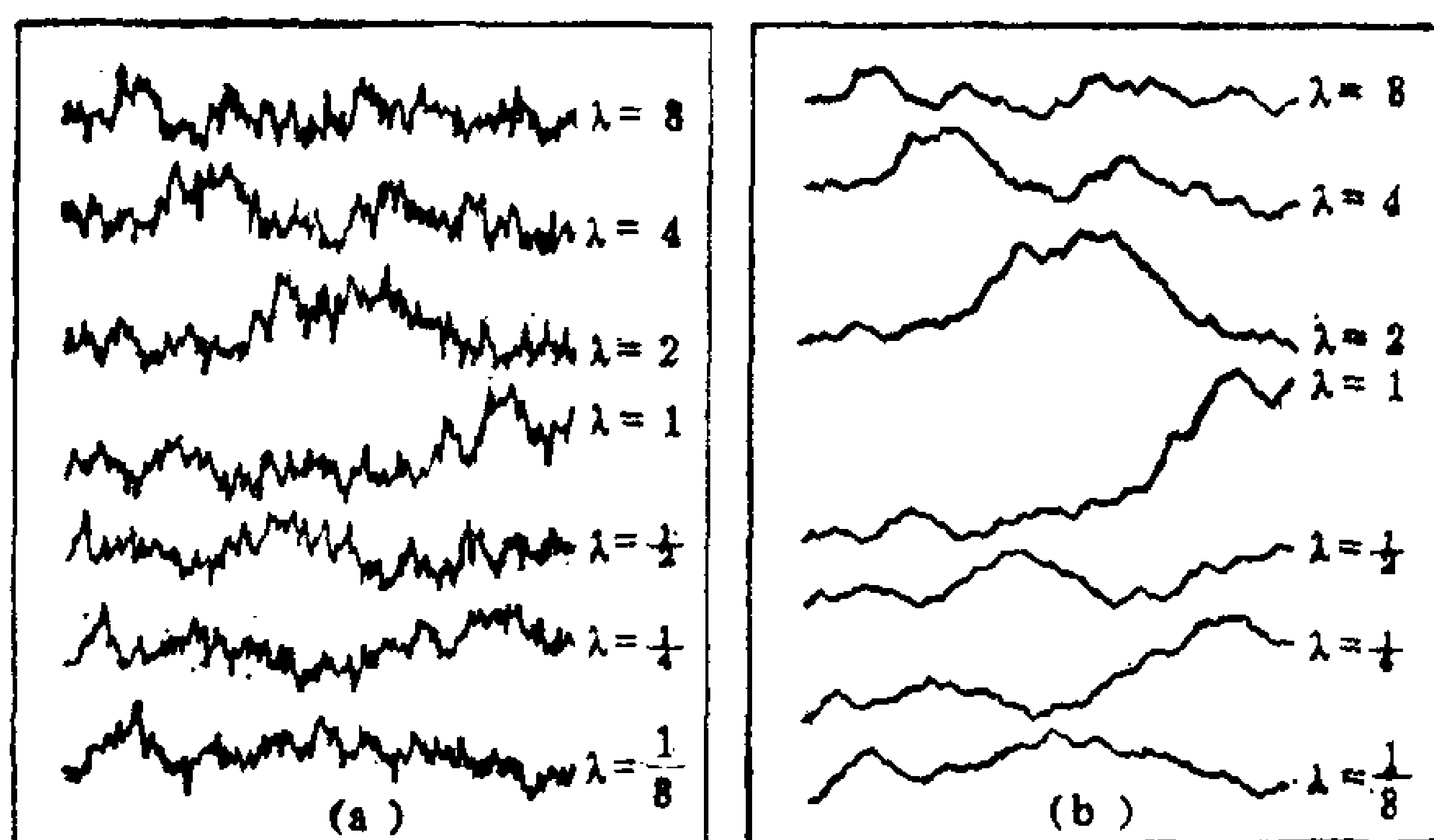



图5.9　重新标度的分数维布朗运动

由于标度指数$\alpha$和功率谱指数$\beta$的关系式（2.38）以及和分维$D$的关系式(2.41)式和（2.42）式，我们只要给出$\alpha$，就可以决定各种不同维数的分数维布朗运动。

## §8　$\frac{1}{f}$噪声及其维数

很多浑沌时间序列显示$f^{-\beta}$形式的功率谱。$\beta=0$即是白噪声，

$\beta=2$是布朗运动的褐色噪声。一般$\beta$在1附近或$0<\beta<1.5$的噪声统称为$\frac{1}{f}$噪声。很多数学、物理系统均具有$\frac{1}{f}$噪声。很奇怪的是世界上最著名的乐曲，如贝多芬的交响曲，斯特劳施的乐曲等曲调也具有$\frac{1}{f}$噪声。图5.10（a）（b）分别是东方和西方不同音乐旋律在双对数坐标系上的功率谱。

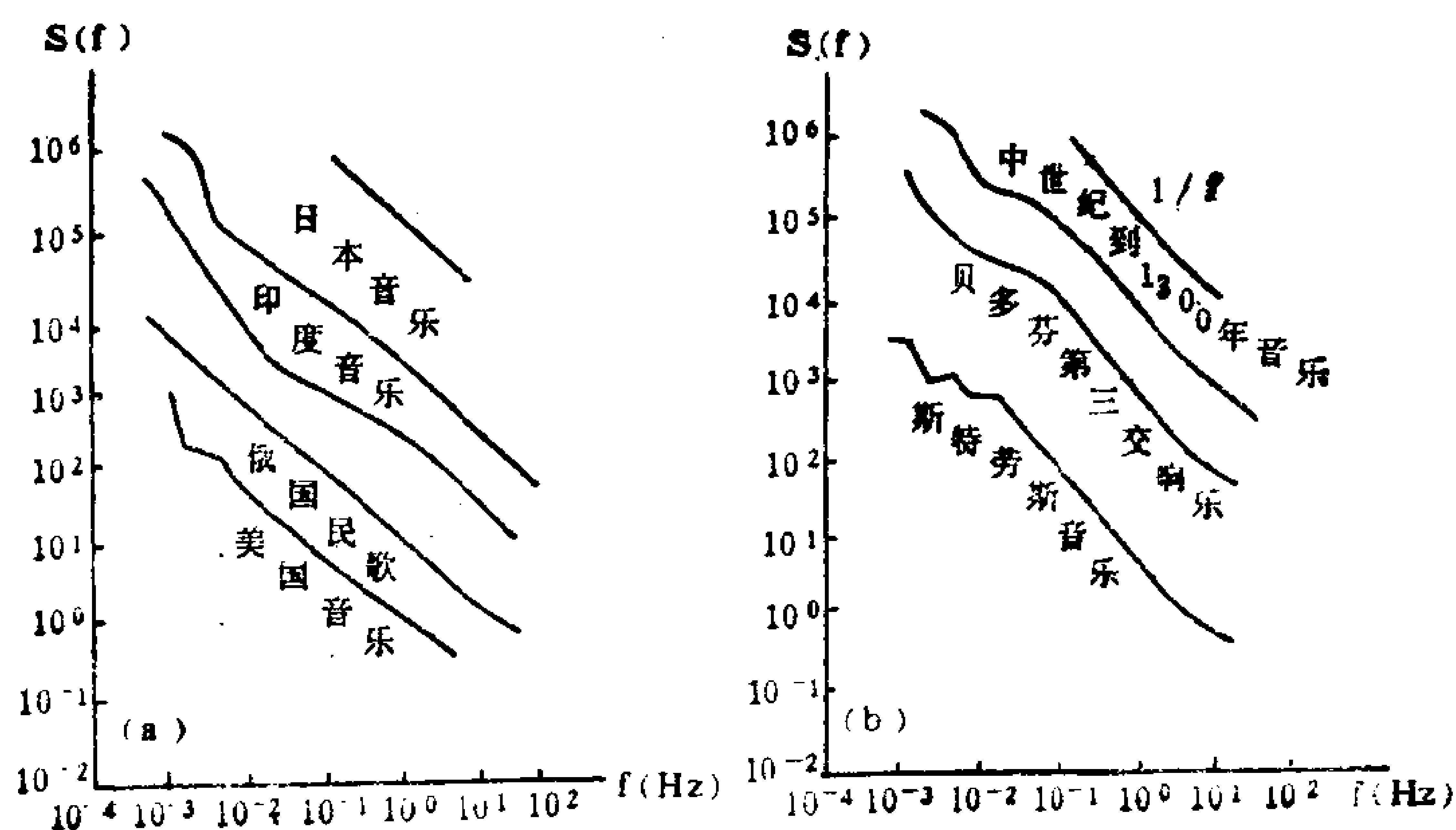



图5.10

(a) 东方和俄国、美国音乐的功率谱

(b) 西方音乐的功率谱

从图上看出，都是$\frac{1}{f}$噪声，所以也称$\frac{1}{f}$音乐。

为了研究$\frac{1}{f}$噪声的分数维，我们不能再简单地使用$\beta$和$D$的关系式（2.42），因为若实际功率谱是$S(f)=f^{-\beta}$，对$\beta>1$或$\beta<1$则对高频或低频功率谱是发散的。

实际上我们使用的时间序列是有限的，且相邻两点之间的时间间隔是有限的，那么就分别存在低频和高频截断。设低频截止

频率为$f_0$，高频截止频率为$f_1$，那么$\frac{1}{f}$噪声的功率谱可设为

$$S(f)=\begin{cases} f_0^{-\beta} & 0<f\leqslant f_0 \\ f^{-\beta}\ ,\ \text{当} & f_0\leqslant f\leqslant f_1 \\ 0 & f_1<f \end{cases} \tag{5.46}$$

那么时间序列$x(t)$的方差为

$$\overline{x^2}=\int_0^\infty S(f)df=f_0^{1-\beta}+\frac{f_0^{1-\beta}-f_1^{1-\beta}}{\beta-1} \tag{5.47}$$

$$=\frac{\beta f_0^{1-\beta}-f_1^{1-\beta}}{\beta-1}$$

对$\beta>1$，近似有

$$\overline{x^2}=\frac{\beta}{\beta-1}f_0^{1-\beta} \tag{5.48}$$

从（5.47）看出，对$\beta\leqslant1$，为了防止紫外突变（即发散），高频截止是必要的；对$\beta\geqslant1$，为了防止红外（低频发散）突变，低频截止是必要的。

功率谱$S(f)$的傅氏变换就是自相关系数$R(\tau)$

$$R(\tau)=\frac{1}{\overline{x^2}}\int_0^\infty S(f)\cos(2\pi f\tau)df$$

$$=\frac{1}{\overline{x^2}}\left[\int_0^{f_0}f_0^{-\beta}\cos(2\pi f\tau)df+\int_{f_0}^{f_1}f^{-\beta}\cos(2\pi f\tau)df\right] \tag{5.49}$$

那么微分时间序列的方差$\sigma_\tau$为

$$\sigma_\tau^2=\overline{[x(t)-x(t-\tau)]^2}=2\overline{x^2}-2\overline{x(t)x(t-\tau)}$$

$$=2\overline{x^2}[1-R(\tau)]$$

$$=\int_0^\infty 4\sin^2(\pi f\tau)S(f)df$$

$$=\int_0^{f_0}4f_0^{-\beta}\sin^2(\pi f\tau)df+\int_{f_0}^{f_1}4f^{-\beta}\sin^2(\pi f\tau)df$$

$$=2f_0^{1-\beta}\left[1-\frac{\sin(2\pi f_0\tau)}{2\pi f_0\tau}\right]+\int_{f_0}^{f_1}4f^{-\beta}\sin^2(\pi f\tau)df \tag{5.50}$$

下面分三种情况讨论$\sigma^2$的渐近状态

(a) 非常短的时间，$\tau\ll\frac{1}{f_1}$

此时（5.50）式中

$$\sin\pi f\tau\approx\pi f\tau,\ 1-\frac{\sin(2\pi f_0\tau)}{2\pi f_0\tau}\approx\frac{1}{6}(2\pi f_0\tau)^2$$

故

$$\sigma_\tau^2\approx2f_0^{1-\beta}\left[\frac{1}{6}(2\pi f_0\tau)^2\right]+4\pi^2\tau^2\int_{f_0}^{f_1}f^{2-\beta}df$$

$$=(2\pi\tau)^2\frac{f_1^{3-\beta}-\frac{\beta}{3}f_0^{3-\beta}}{3-\beta}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{3-\beta}f_1^{3-\beta}(2\pi\tau)^2 & 当\beta<3\\ \frac{\beta}{3(3-\beta)}f_0^{3-\beta}(2\pi\tau)^2 & 当\beta>3\end{cases} \tag{5.51}$$

因而此种情况下

$$\sigma_\tau\sim\tau \tag{5.52}$$

(b) 中等时间，$\frac{1}{f_1}\ll\tau\ll\frac{1}{f_0}$

此时（5.50）式近似地有

$$\sigma_\tau^2\approx\frac{1}{3}f_0^{3-\beta}(2\pi\tau)^2+4\tau^{\beta-1}\left[\int_{f_0\tau}^{f_1\tau}\sin^2(\pi f\tau)(f\tau)^{-\beta}d(f\tau)\right] \tag{5.53}$$

$$\approx4I(\beta)\tau^{\beta-1}$$

和（5.53）式中有关的积分

$$\int_0^{\infty}\sin^2(\pi f\tau)(f\tau)^{-\beta}d(f\tau)=I(\beta)$$

在$\beta\to1$时，接近于$\frac{1}{2(\beta-1)}$；$\beta\to3$时接近于$\frac{\pi^2}{3-\beta}$，$1<\beta<3$时，接近于常数（约 2 到10）。故对$1<\beta<3$，（5.53）式右边第二项占优，即

$$\sigma_\tau\sim\tau^{\frac{\beta-1}{2}} \tag{5.54}$$

（c）非常长的时间，$\tau\gg\frac{1}{f_0}$

则（5.50）式可化为

$$\sigma_\tau^2=2f_0^{1-\beta}\left[1-\frac{\sin(2\pi f_0\tau)}{2\pi f_0\tau}\right]+4f_0^{1-\beta}\int_1^{\frac{f_1}{f_0}}\sin^2\left(\pi f_0\tau\frac{f}{f_0}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{f}{f_0}\right)^{-\beta}d\left(\frac{f}{f_0}\right)\approx2f_0^{1-\beta}\left[1-\frac{\sin(2\pi f_0\tau)}{2\pi f_0\tau}\right]+2f_0^{1-\beta}$$

$$\int_1^{\infty}\left[1-\cos\left(2\pi f_0\tau\frac{f}{f_0}\right)\right]\left(\frac{f}{f_0}\right)^{-\beta}d\left(\frac{f}{f_0}\right)\approx2f_0^{1-\beta}\left[1-\frac{\sin2\pi f_0\tau}{2\pi f_0\tau}\right]$$

$$+2f_0^{1-\beta}\left[\frac{1}{\beta-1}+\frac{\sin(2\pi f_0\tau)}{2\pi f_0\tau}-\beta\frac{\cos(2\pi f_0\tau)}{(2\pi f_0\tau)^2}\right]$$

$$=2f_0^{1-\beta}\left[\frac{\beta}{\beta-1}-\beta\frac{\cos(2\pi f_0\tau)}{(2\pi f_0\tau)^2}\right]$$

将（5.48）代入上式得

$$\sigma_\tau^2\approx2\overline{x^2}\left[1-(\beta-1)\frac{\cos(2\pi f_0\tau)}{(2\pi f_0\tau)^2}\right] \tag{5.55}$$

故

$$\sigma_\tau\sim\text{常数} \tag{5.56}$$

在分析$\sigma_\tau$的基础上，我们来分析相关维数，按相关维数$D$的（5.10）式定义，参照（5.12）式，相关维数$D_2$也可表示为

$$\overline{P_\tau(r)}\sim r^{D_2} \tag{5.57}$$

其中$P_\tau(r)$是“点对”（$x_{t-\tau}$，$x_t$）处在$r$球内的概率，即

$$(x_t - x_{t-\tau})^2 < r^2$$

按照（5.19）式的定义，显然正态分布

$$P_\tau(r) = erf\left(\frac{r}{\sqrt{2}\,\sigma_\tau}\right) \tag{5.58}$$

对于嵌入空间为$m$维的时间序列

$$P_\tau(r) = erf\left(\frac{r}{\sqrt{2}\,\sigma_\tau}\right)^m \tag{5.59}$$

由（5.57）式，相关函数$c(r)$可表示为

$$c(r) = \overline{P_\tau(r)} = \frac{2}{N^2}\sum_{\tau=1}^{N} P_\tau(r)(N-\tau)$$

$$= \frac{2}{N^2}\sum_{\tau=1}^{N}(N-\tau)erf\left(\frac{r}{\sqrt{2}\,\sigma_\tau}\right)^m \tag{5.60}$$

由于误差函数$erf(x)$有如下渐近状态

$$erf(x) = \begin{cases} x & \text{当}x\text{小时} \\ 1 & \text{当}x\text{大时} \end{cases} \tag{5.61}$$

故定义$\tau(r)$作为过渡的$\tau$值

$$\sqrt{2}\,\sigma_{\tau(r)} = r \tag{5.62}$$

那么（5.60）式就可写为

$$c(r) = \frac{2}{N^2}\left[\sum_{\tau=1}^{\tau(r)}(N-\tau)erf\left(\frac{r}{\sqrt{2}\,\sigma_\tau}\right)^m + \sum_{\tau=\tau(r)}^{N}(N-\tau)\right.$$

$$\left. - erf\left(\frac{r}{\sqrt{2}\,\sigma_\tau}\right)^m\right]$$

$$\approx \frac{2}{N^2}\left[\sum_{\tau=1}^{\tau(r)}(N-\tau) + \sum_{\tau=\tau(r)}^{N}(N-\tau)\left(\frac{r}{\sqrt{2}\,\sigma_\tau}\right)^m\right]$$

$$= \frac{2}{N^2}\left[\left(N\tau(r) - \frac{1}{2}\tau^2(r)\right) + r^m 2^{-\frac{m}{2}}\sum_{\tau=\tau(r)}^{N}(N-\tau)\sigma_\tau^{-m}\right]$$

$$=\frac{2\tau(r)}{N}\left(1-\frac{\tau(r)}{2N}\right)+\frac{2^{1-\frac{m}{2}}}{N^2}r^m\left[\sum_{\tau=\tau(r)}^{N}N\sigma_\tau^{-m}\right.$$

$$\left.-\sum_{\tau=\tau(r)}^{N}\tau\sigma_\tau^{-m}\right] \tag{5.63}$$

下面我们讨论中等时间 (b) 的情况，即 (5.5x) 式成立。那么在$N\gg\tau(r)$，$m>\frac{2}{\beta-1}$时，(5.63) 式右边方括号中的

$$\sum_{\tau=\tau(r)}^{N}N\sigma_\tau^{-m}\approx\int_{\tau(r)}^{N}N\sigma_\tau^{-m}\approx N[4I(\beta)]^{-\frac{m}{2}}\int_{\tau(r)}^{N}T^{-\frac{m(\beta-1)}{2}}$$

$$=\frac{N[4I(\beta)]^{-\frac{m}{2}}}{1-m(\beta-1)/2}\left[\tau(r)^{1-\frac{m(\beta-1)}{2}}-N^{1-\frac{m(\beta-1)}{2}}\right]$$

$$=\frac{N[4I(\beta)]^{-\frac{m}{2}}}{1-\frac{m(\beta-1)}{2}}\tau(r)^{1-\frac{m(\beta-1)}{2}}\left[1-\left(\frac{\tau(r)}{N}\right)^{\frac{m(\beta-1)}{2}-1}\right]$$

$$\approx\frac{N[4I(\beta)]^{-\frac{m}{2}}}{1-\frac{m(\beta-1)}{2}}\tau(r)^{1-\frac{m(\beta-1)}{2}} \tag{5.64}$$

类似地有

$$\sum_{\tau=\tau(r)}^{N}\tau\sigma_\tau^{m}\approx\frac{[4I(\beta)]^{-\frac{m}{2}}}{2-\frac{m(\beta-1)}{2}}\tau(r)^{2-\frac{m(\beta-1)}{2}} \tag{5.65}$$

对于$N\gg\tau(r)$，那么 (5.65) 项相对 (5.64) 项也可以忽略。那么从 (5.53) 式和 (5.62) 式有

$$\tau(r)^{\frac{\beta-1}{2}}=\frac{\sigma_{\tau(r)}}{[4I(\beta)]^{\frac{1}{2}}}=\frac{r}{[8I(\beta)]^{\frac{1}{2}}}$$

令　$R_*=[8I(\beta)]^{\frac{1}{2}}$则得到

$$\tau(r)=\left(\frac{r}{R_*}\right)^{\frac{2}{\beta-1}} \tag{5.66}$$

则 (5.63) 式有

$$c(r) \approx \frac{2}{N}\left(\frac{r}{R_*}\right)^{\frac{2}{\beta-1}} + \frac{2^{1-\frac{m}{2}}}{N_2} r_m \left( \frac{N\left(\frac{R_*}{\sqrt{2}}\right)^{-m}}{1-\frac{m}{2/(\beta-1)}} \tau(r)^{1-\frac{m}{2/(\beta-1)}} \right)$$

$$\approx \frac{2}{N}\left(\frac{m-2\cdot\frac{2}{\beta-1}}{m-\frac{2}{\beta-1}}\right)\left(\frac{r}{R_*}\right)^{\frac{2}{\beta-1}} \tag{5.67}$$

根据（5.57）式的定义，此时相关维数为

$$D_2 = \frac{2}{\beta-1} \qquad (\beta<3) \tag{5.68}$$

## §9　浑沌时间序列的非线性模式

大家知道传统的动力系统模式有两条线索：一是从第一原理导出确定性的方程，测量初条件将方程向前时间积分；另一是当第一原理模式推导不出或没有可采用的初条件时，此时动力学过程就借用随机过程来描述。这两种方法似乎互相分离从不重迭。一般总认为复杂现象是由很多自由度造成的，它们被分析作为随机过程，而简单的现象总认为是确定性的。

浑沌的发现将确定的系统和随机过程之间搭起了桥梁。浑沌虽有敏感初条件的性质，但它确说明不是所有的随机像的状态均是复杂物理过程所产生的，极少的自由度也能产生复杂的随机运动。这就使得随机像的状态不必用随机过程而用确定性的方法来描述模拟。所谓时间序列模式，就是在不能利用第一原理的情况下利用时间序列建立非线性模型。

前面叙述的时间序列求出的维数及最小相空间的维数，是描述该时间序列状态的所必要的自由度数，这是用时间序列建立动力学模式的第一步。本节主要论述非线性模型的建立。

若嵌入空间维数为$m$，那么我们能否从前$m$个点$x_t$，$x_{t-\tau}$，

$x_{t-2\tau}\cdots\cdots x_{t-(m-1)\tau}$ 来预测$x_{t+\tau}$，即

$$x_{t+\tau}=f(x_t,\ x_{t-\tau},\ \cdots\cdots\cdots x_{t-(m-1)\tau}) \qquad (5.69)$$

下面介绍常用的几种方法

（1）建立简单的Poincare映射

若在相平面上我们已经通过嵌入相空间的办法找到其轨迹，如图5.11的（a）和（c），然后找出一个Poincare截面截出轨道上有若干点，图5.8（c）就是8个点。

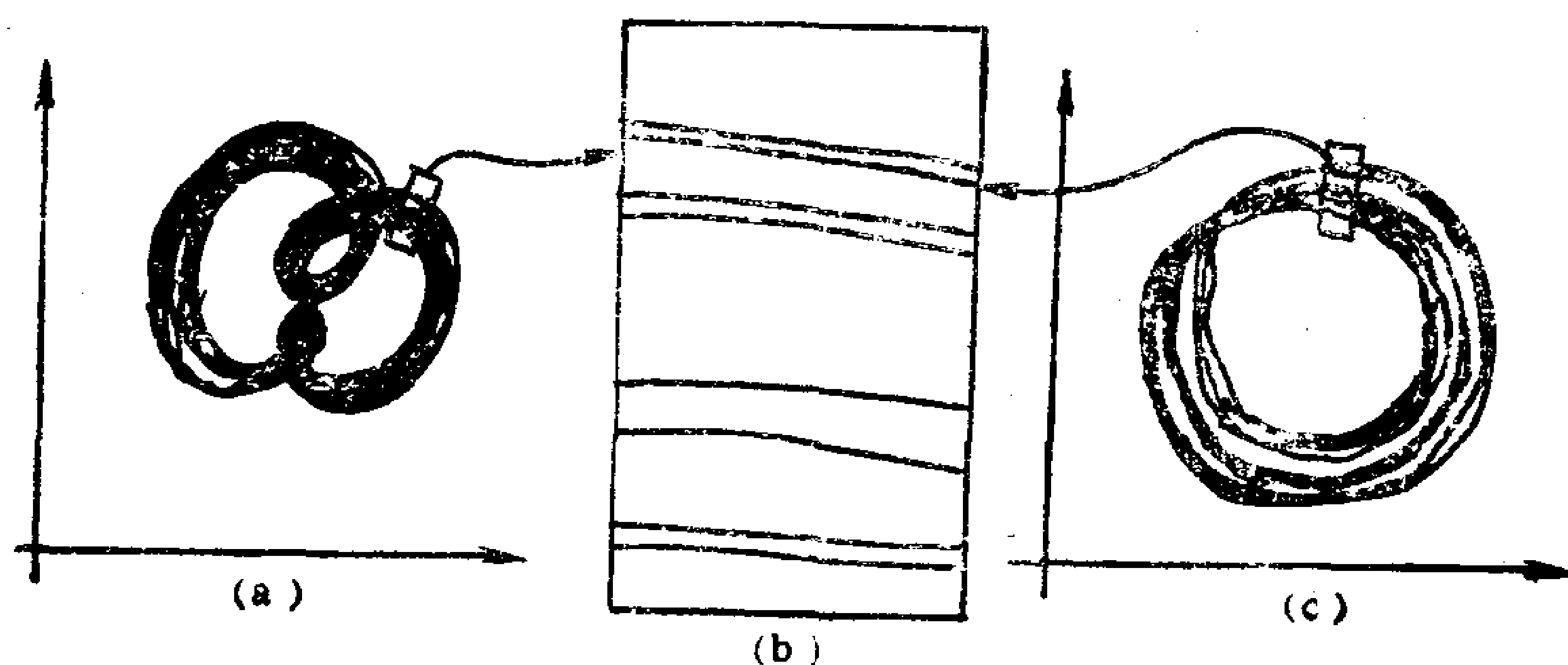



图5.11　相平面轨道的Poincare截面

(a) 和 (c) 是轨道　(b) 是截面上的点

然后按顺序（$x_1$，$x_2$），（$x_2$，$x_3$），（$x_3$，$x_4$）……（$x_6$，$x_7$）（$x_7$，$x_8$）在坐标平面（$x_n$，$x_{n+1}$）上点出这截出的点，再将这些点拟合成一个非线性函数，就形成下列映射

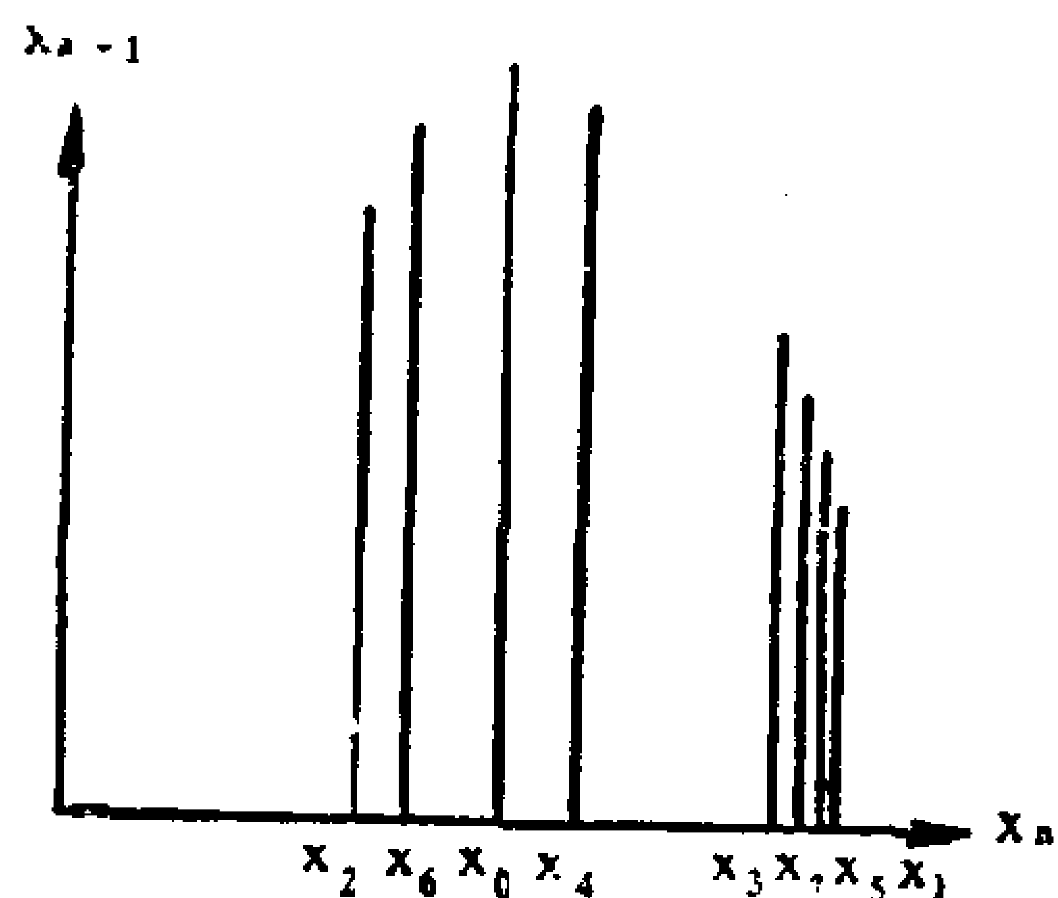



图5.12　非线性映射的建立

$$x_{n+1}=f(x_n) \qquad (5.70)$$

如图5.12所示。

至于截面选取的方法是很多的，可以在时间序列中找出最大值或极大值建立起$x_1$，$x_2$，……$x_n$，$x_{n+1}$等截面点，也可以选取极小值，还可以按原序列空出多少点选取一个点的办法，甚至于

可以将原序列的数值分成等级的办法。

（2）局部近似法

从$m$维嵌入相空间中的所有点中建立一个多项式（非线性），用最小二乘法确定参数，这是一种全局的函数表达式。更常用的却是在相邻的$K$个点中建立一个线性映射，如图5.13所示。在图中空心小圆代表目前的状态$x(t)$以及未来的未知状态$x(t+T)$。简单的天气预报就是在小空心圆圈附近找一个相邻的很相似的状态（黑点），用后者$T$以后演化成的状态作为预报值。我们现在在$x(t)$附近找出$K$个点（大圆内的黑点）和$T$时刻后的$K$个黑点之间拟合一个线性函数，并用其预测值作为$x(t+T)$的近似，每个局部可以都是线性的，但整体上却是非线性的。这种方法又点象汤加豪提出的门限自回归模型，汤的方法一般根据系统的状态建立两个或三个不同的线性回归模型，而我们这里可以根据每种状态建立不同的模型。

（3）GMDH方法

该方法是苏联学者Ivakhnenko提出的，它的全名是Gronp Method of Data Handling（数据处理的分组方法）。该方法是仿照生物有机体演化的遗传选择特点。

对$n$个数据$x_1$，$x_2$，……$x_n$，它称为输入变量，我们若要建立一个高阶回归模型

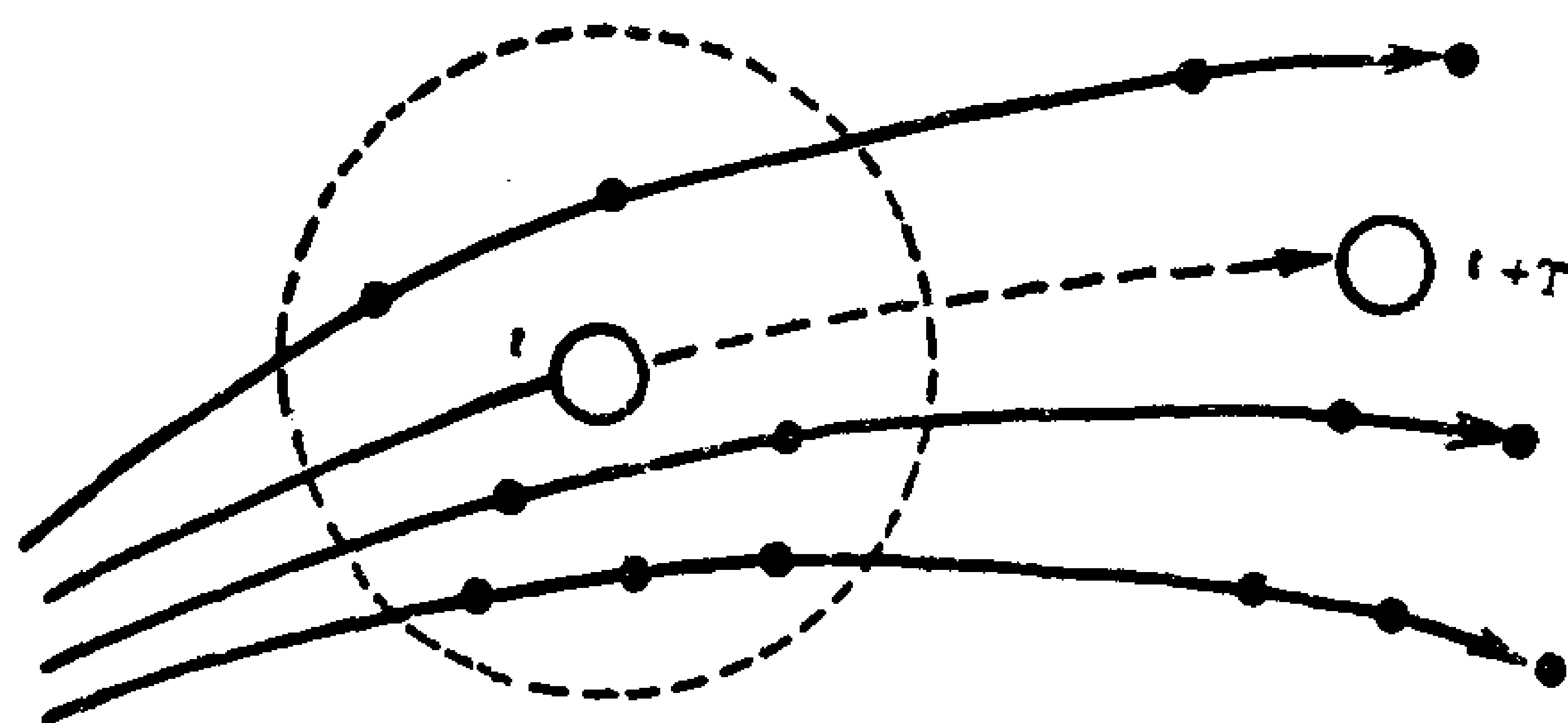



图5.13　动力系统的局部预测

$$y=f(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots x_n) \tag{5.71}$$

其中$y$叫输出变量。GMDH方法不是直接建立（5.71）式，而是首先对输入变量中的每一对$x_i$和$x_j$以及输出变量建立一个二次回归方程。

# 第六章　地球物理学中的分形

## §1　跨越很宽的尺度

几乎所有地球物理学中的现象都跨越很宽的时空尺度，也就是说没有特征尺度。若把地球看成是一个整体的动力系统，那么从时间尺度上讲，从秒一直到十亿年；空间尺度上讲，从毫米一直到全球尺度；就问题上讲，从湍流到地幔对流，从植物生长到地球、生命的起源。

例如，涉及到全球变化的主要时间尺度有如下五个时间尺度带：

百万年到亿年　如地幔对流和板块构造的运动，造山运动和火山活动，生命的演化以及和其配合的大气化学成分的改变等等。

千年　如冰期和间冰期之间的振荡以及与其相配合的生物物种的密度及分布，它们都明显地响应围绕太阳旋转的地球轨道的变化，它是以千年为一循环。

百年　这种变化威胁着地球上生命的生存。如气候的变化，大气的化学成分，地表干燥度和酸度，地上和海上的生物系统等。

天到季节　天气现象，海洋环流涡旋，冰盖和冰川的季节增长和融化，地表迳流和风化，植物生长年轮变化等，它们都受到太阳辐射年变化的限制。

秒到小时　大陆、海洋、冰、大气之间的物质、动量和能量的湍流交换。

## §2　湍流过程

地球物理现象既然跨越很宽的时空尺度，因此各种尺度之间

的非线性互相作用必然表现在地球物理量的时间序列上。图6.1说明一个观测到的垂直风速记录 $w'(t)$，它反映了是由各种不同的湍流涡旋所构成的。虽然从狭义上讲和流体湍流的流动图象还有不同，但实际上广义上这种时间序列的反映正是一种湍流，而且我们用上一章重建相空间的办法，将这个时间序列恢复成相空间湍流流动的轨迹。

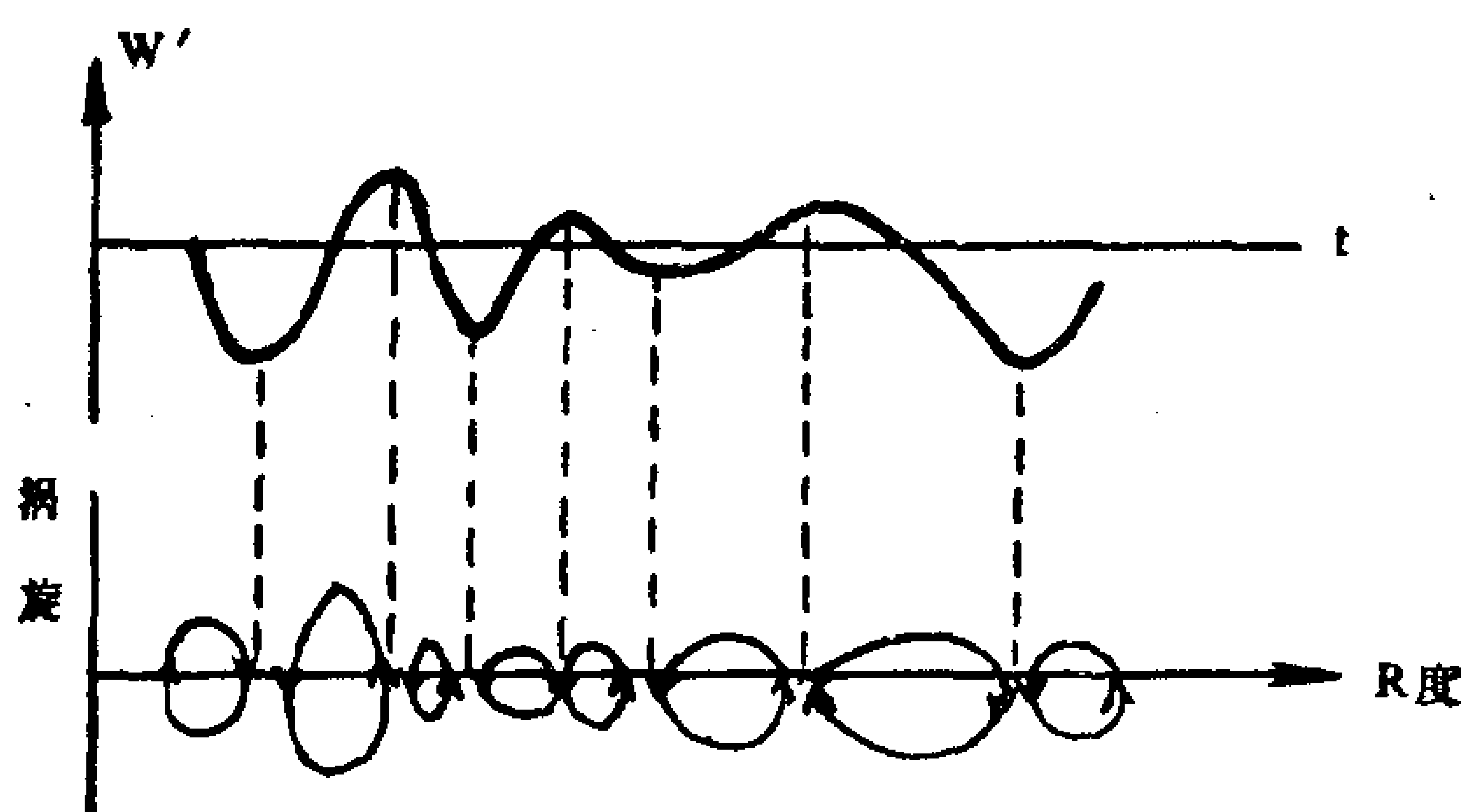



图6.1 一个时间序列反映出各种不同尺度的涡旋

在第四章中，我们曾经说明流体湍流满足的Navier-Stokes方程（4.9)式在标度变换(4.11)式下其形式不变。这也就是说，速度涨落$\Delta v(r)$或其它标量（如温度$T$或密度$\rho$)涨落$\Delta T(r)$满足如下标度律

$$\Delta v(\lambda r)=\lambda^{a}\Delta v(r) \tag{6.1}$$

$$\Delta T(\lambda r)=\lambda^{a}\Delta T(r) \tag{6.2}$$

根据（4.13）式，我们只要假设湍流能量或标量方差的输送率$\varepsilon$或$\chi$是统计上均匀和各向同性的，即

$$\begin{aligned}\varepsilon&=\frac{\partial(\Delta v(r)^2)}{\partial t}=\text{const}\\ \chi&=\frac{\partial(\Delta T(r)^2)}{\partial t}=\text{const}\end{aligned} \tag{6.3}$$

那么，就求得（6.1）式和（6.2）式中的标度指数

$$\alpha = \frac{1}{3} \tag{6.4}$$

因而，相应的功率谱

$$S(k) \sim k^{-\beta} \tag{6.5}$$

指数 $\beta = 2\alpha + 1 = 5/3$。

这种由大尺度湍涡把能量或标量方差传输到小尺度湍涡的串级（cascade）过程，就是与功率谱为幂函数的（6.5）式相联系的单标度（simple scaling）过程，这也是分数维的最简单的含义。

所以若把地球物理现象广义上看成湍流的话，所谓自相似就是各向同性湍流，它又分为均匀和非均匀（间歇）湍流两种，见图6.2。

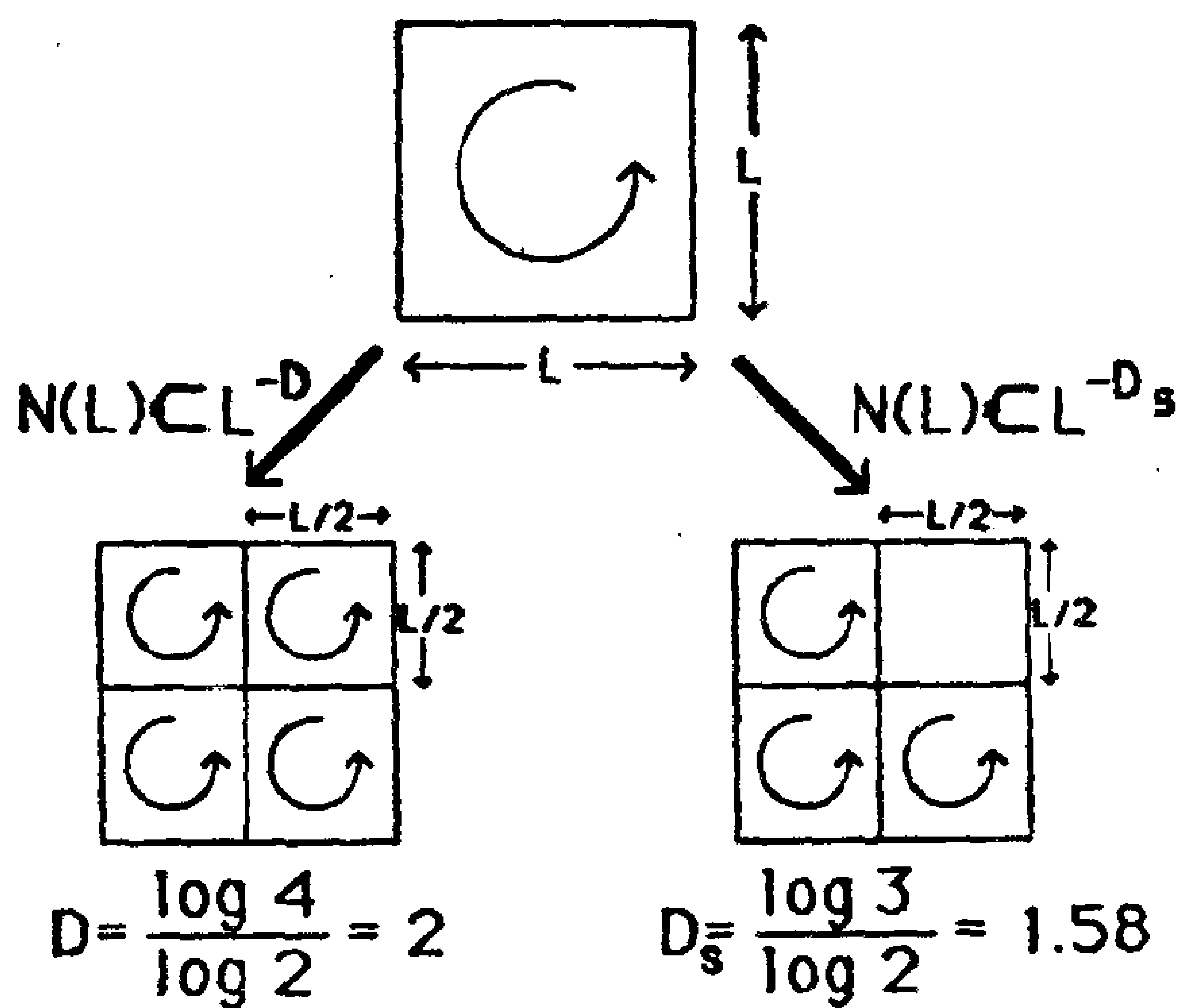



图6.2　各向同性均匀湍流串级过程

我们应该看到$\varepsilon$和$\chi$的非奇异的状态由于串级输送过程而导得速度场$\Delta v$或标量场$\Delta T$的奇异状态：

$$\begin{aligned}(\Delta v)^2 &\sim r^{2/3} \\ (\Delta T)^2 &\sim r^{2/3}\end{aligned} \tag{6.6}$$

（6.6）式就是著名的结构函数的2/3方定律。

## §3 细粒化和粗视化

湍流能量输送及标量方差输送$\varepsilon$和$\chi$在均匀的条件，可以形成速度场和温度场的奇异性。但是若$\varepsilon$和$\chi$本身就不太均匀或奇异，那么一定会修正速度场的奇异性。

湍流涡旋的串级过程，即细粒化（Bare），除了象图6.2 那样的各向同性的细粒化，还可以有图6.3那样的非各向同性的细粒化，它也可以分为均匀和非均匀的两种。此时就不象图6.2那样大尺度的结构简单地就是小尺度的放大。此时必须加以伸长或压缩才能和大尺度相似，这样的分形就是前述的自仿射分形。

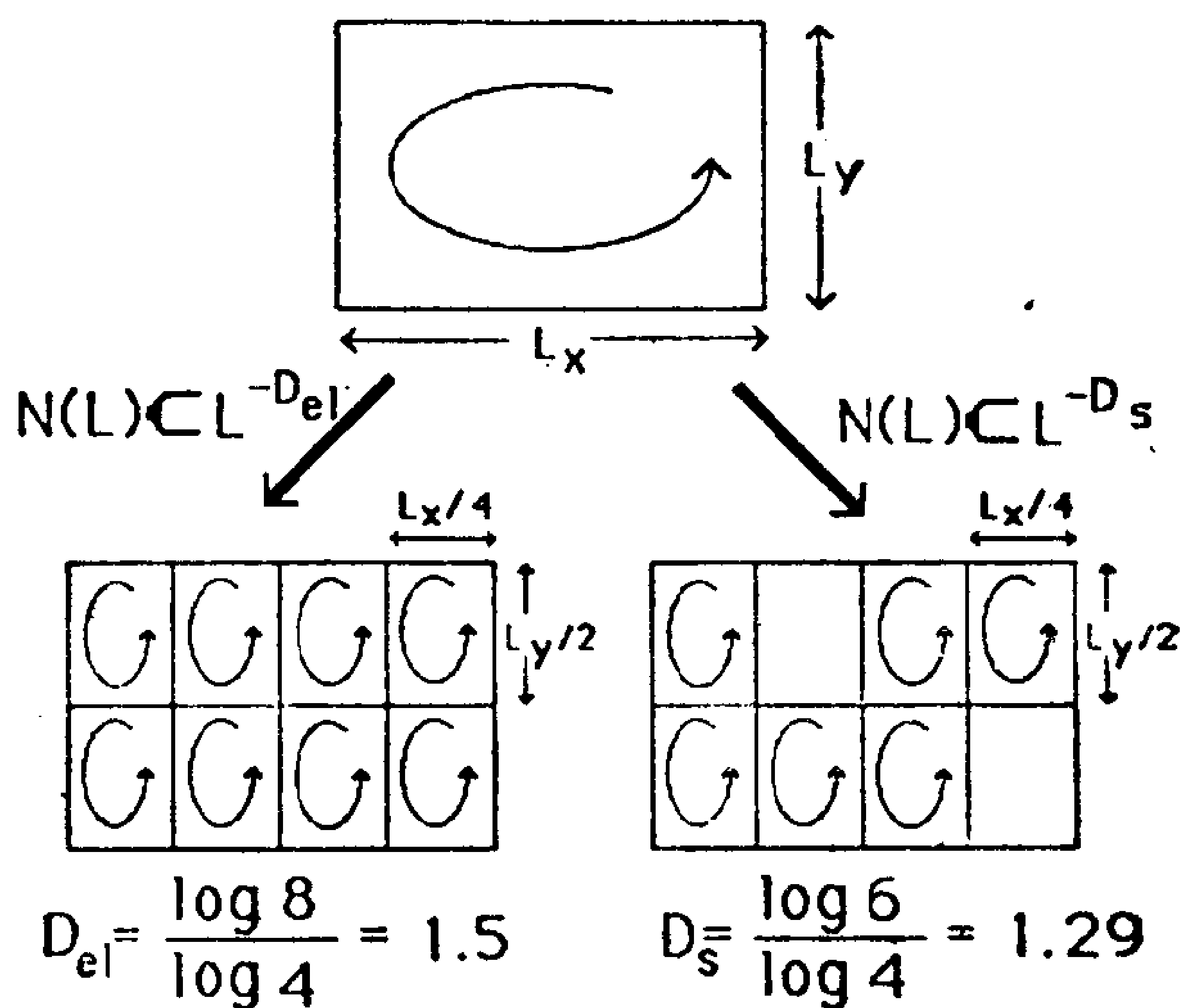



图6.3　非各向同性湍流串级过程

由于作用在大尺度大气运动的外力是非均匀的，因此由大尺度串级到小尺度的串级过程，其耗散率$\varepsilon$或标量方差$\chi$一般是非均匀的，图6.4是最初均匀的$\varepsilon$通过串级过程（但保持面积守恒）而

出现在某些区域有高强度的$\varepsilon$或$\chi$（奇异性），也即在某些区域有不活动的涡旋。

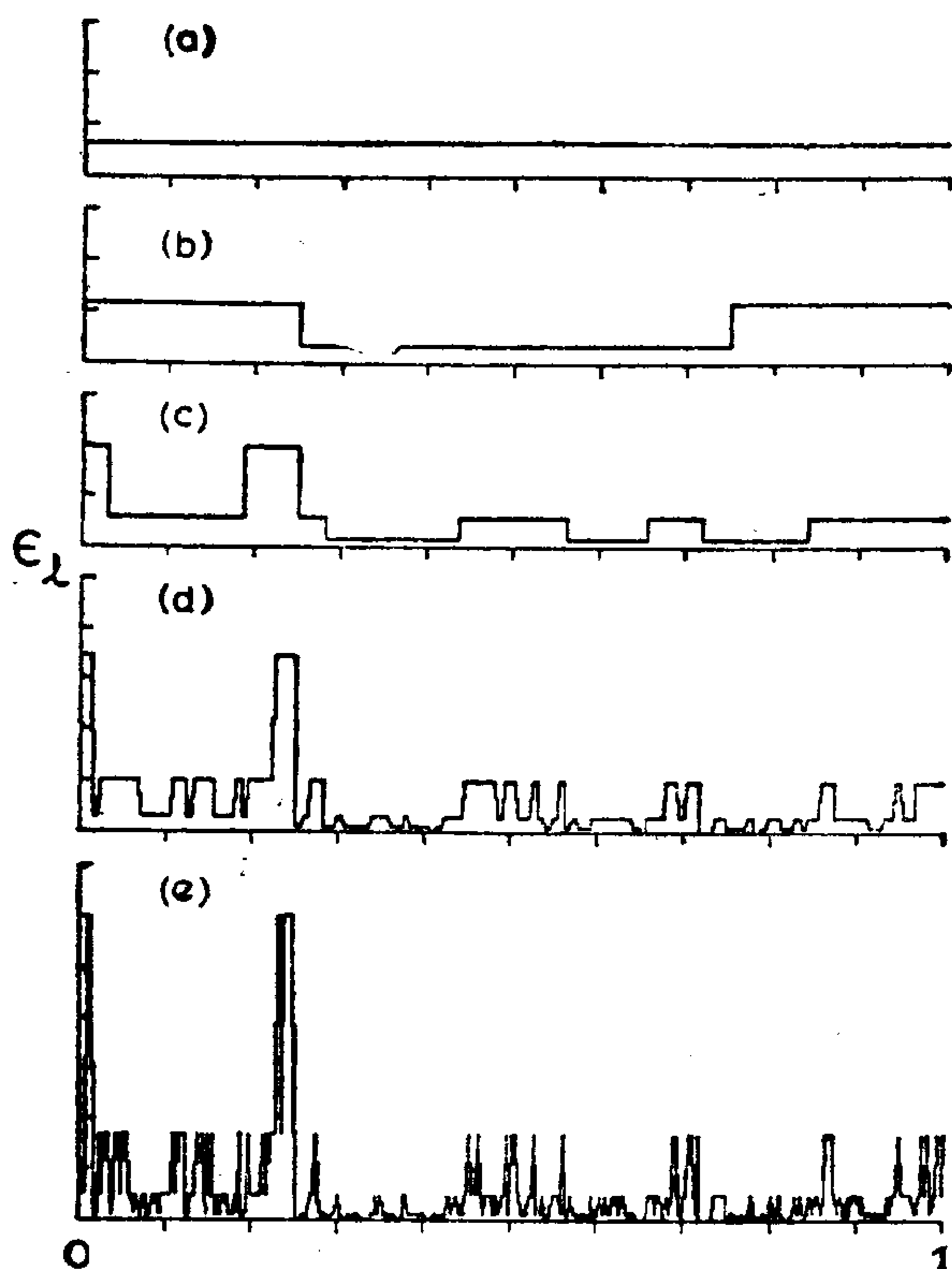



图6.4　$\varepsilon$的非均匀的串级过程

与细粒化(串级过程)相反，实际观察时都是取一定范围内的平均量,这个过程即为粗视化(coarse graining或叫dressed)。在上一章中我们看到若是纯粹的自相似，这种粗视化并不改变其分数维，否则将改变其结构。图6.5是在二维空间中$\varepsilon$的细粒化和粗视化的过程。

从图6.5上,我们看出两点：

（1）串级的细粒化过程造成$\varepsilon$的奇异性或间歇性。

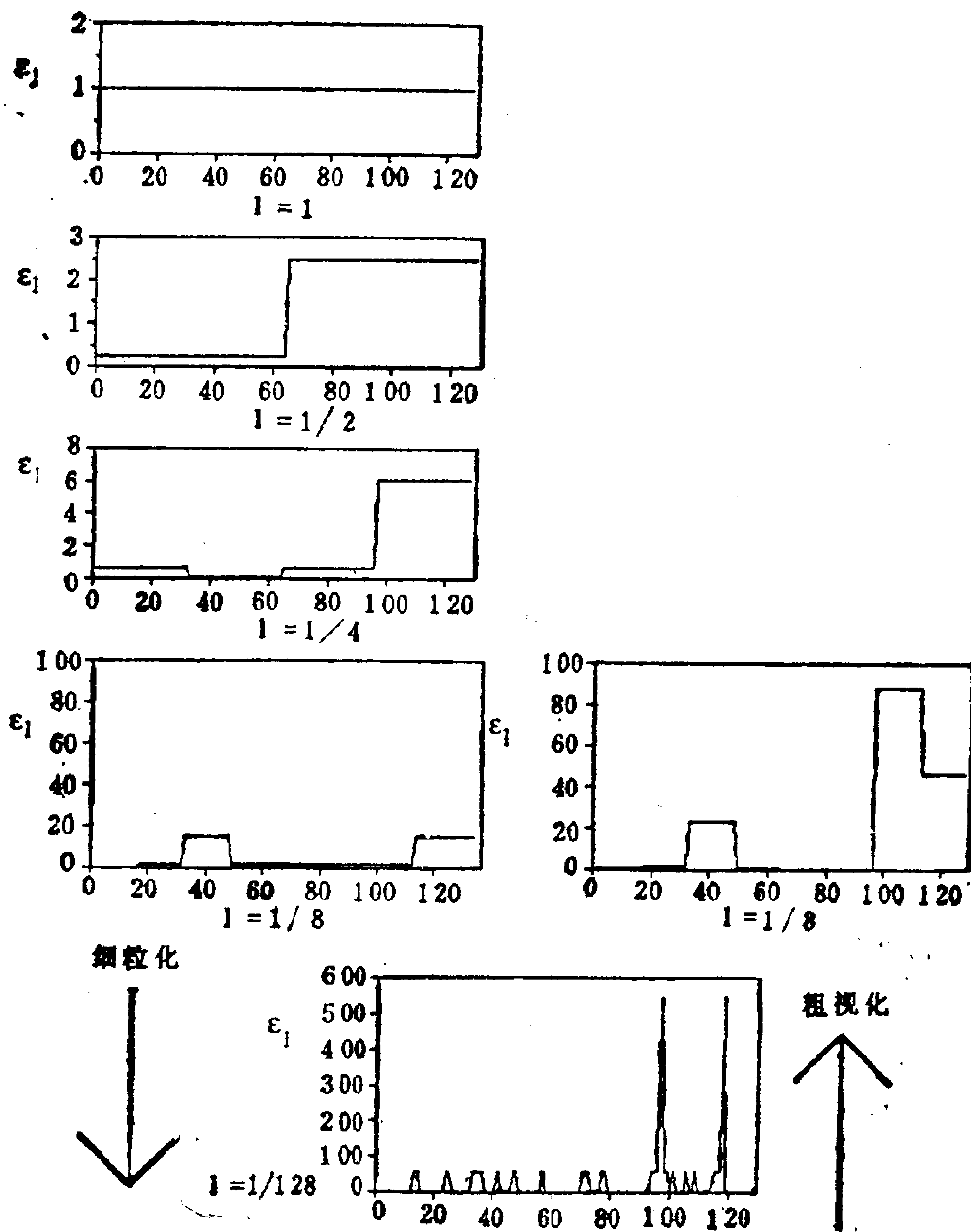



图6.5　ε的粗视化和细粒化过程

左：细粒化（由上到下）

右：粗视化（由下到上）

（图中的$l$表示尺度）

（2）粗视化过程要将信息压缩，但多多少少还会反映出小尺度奇异性的贡献。

## §4 α和β模式，椭圆维数

非各向同性湍流串级过程的两种类型中，非均匀串级过程又可分为两种情况，一种是涡旋串级过程中，有的涡旋是“活”的，有的涡旋变成“死”的，这种间歇湍流模型叫β模式。另一种是串级过程中涡旋似乎都是“活”的，但是有的涡旋强，有的涡旋弱，这样涡旋之间就有动量辐散，这种间歇湍流模型叫α模式。

无论是α还是β模式都可以认为是不同“方向”有不同的标度，看起来好像原来是“躺”着的大涡旋变成“竖”着的小涡旋，见图6.6。

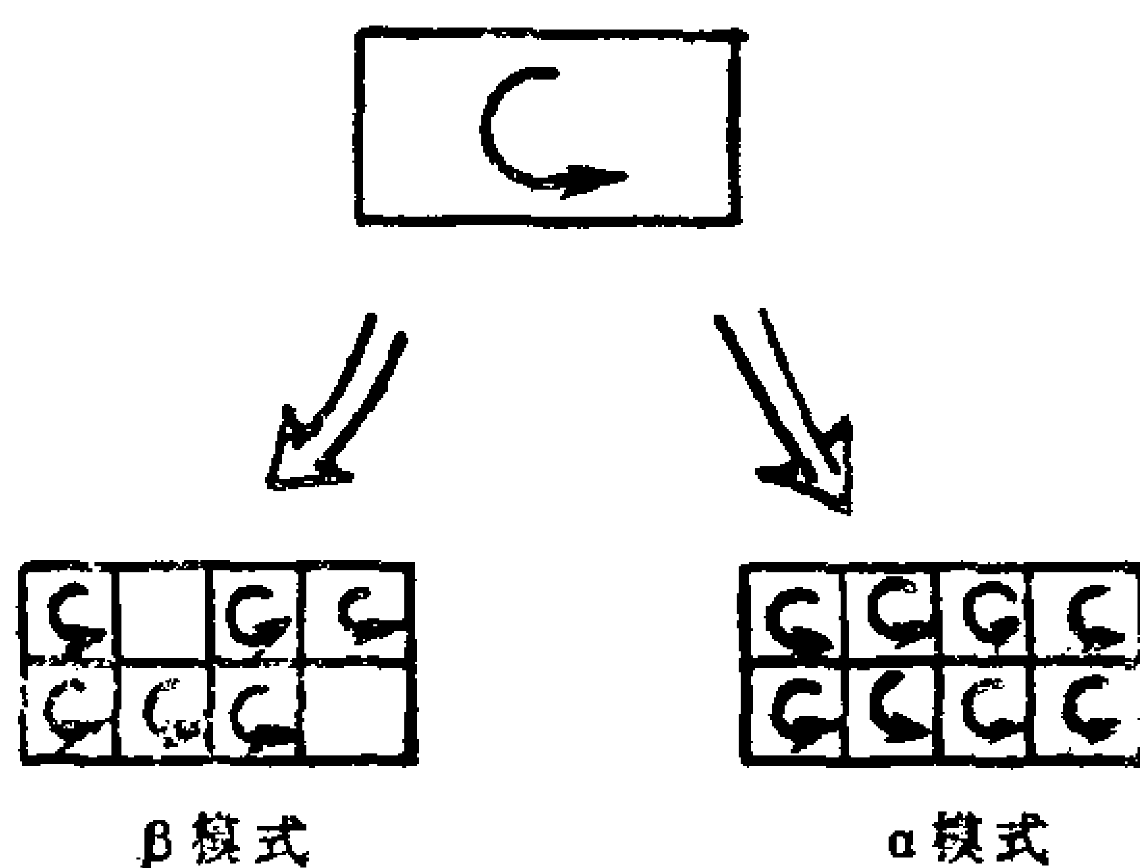



图6.6 α模式和β模式

如何来量度这种不均匀的标度呢？例如大气在垂直方向上由于有速度剪切和浮力的影响，速度差$\Delta v$在垂直方向和水平方向上的标度不同，即

$$\begin{aligned}\Delta v(\lambda x)&=\lambda^{\alpha_{水平}}\Delta v(x)\\ \Delta v(\lambda y)&=\lambda^{\alpha_{水平}}\Delta v(y)\\ \Delta v(\lambda z)&=\lambda^{\alpha_{垂直}}\Delta v(z)\end{aligned} \qquad (6.7)$$

我们将（6.7）式写成矩阵形式

$$\Delta v\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda^{\alpha}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{pmatrix}=\lambda^{\alpha_{水平}}\cdot\Delta v\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{pmatrix} \qquad (6.8)$$

其中

$$\alpha=\frac{\alpha_{水平}}{\alpha_{垂直}} \qquad (6.9)$$

那么这种变换的结果就相当于原来立着的“对流”涡旋经过放大和压缩过程变成躺着的“Hadley”涡旋，见图6.7。且涡旋体积

以 (6.8) 式左边矩阵的行列式值

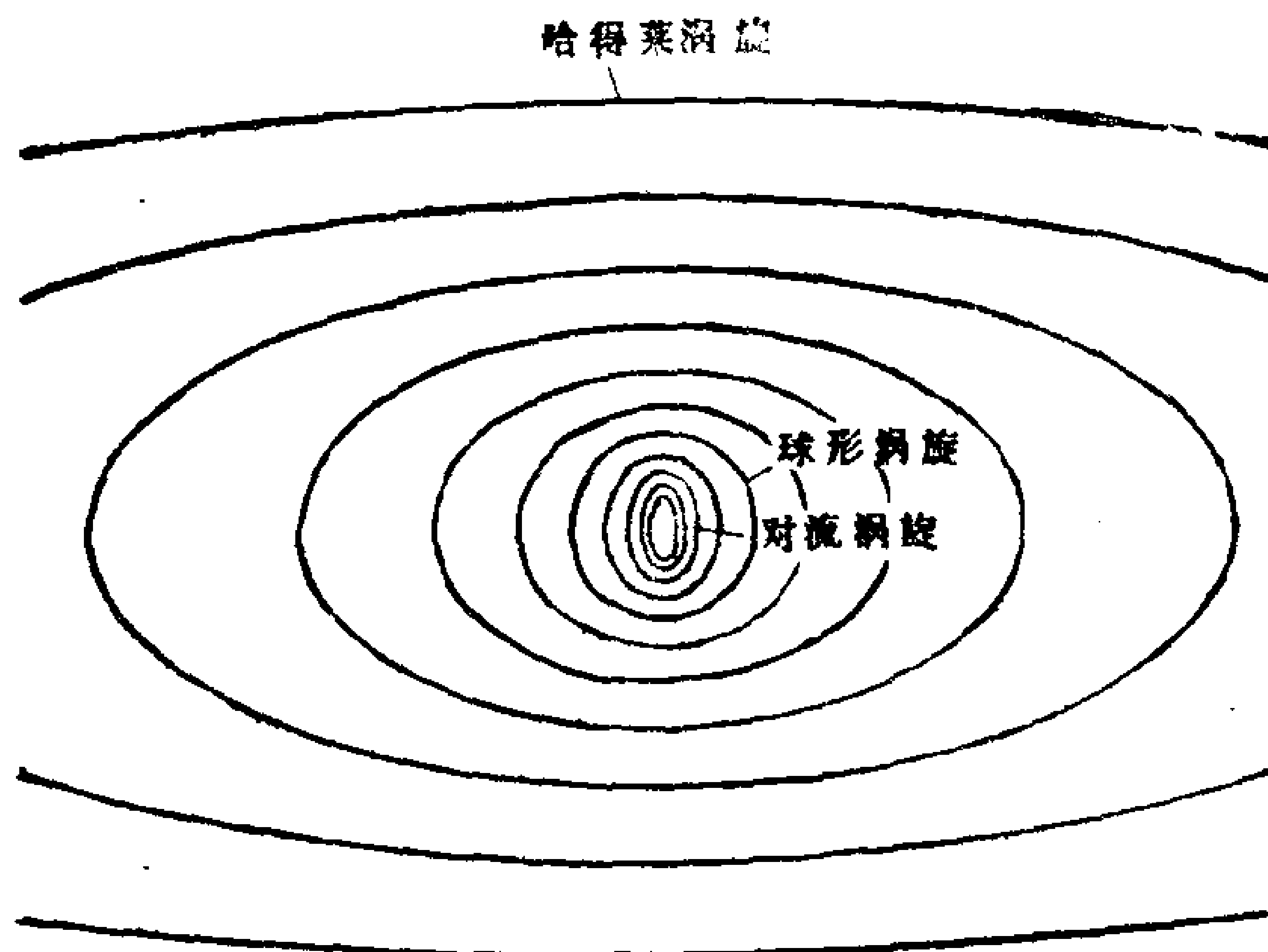



图6.7 小尺度的"对流"涡旋变成大尺度的"Hadley"涡旋

$$\lambda^1 \cdot \lambda^1 \cdot \lambda^\alpha = \lambda^{d_{el}} \qquad (6.10)$$

增加，其中

$$d_{el} = 1 + 1 + \alpha \qquad (6.11)$$

叫椭圆维数 (elliptical dimension)。下节将看到对于大气，有

$$\alpha_{水平} = \frac{1}{3}, \quad \alpha_{直垂} = 3/5 \qquad (6.12)$$

故椭圆维数$d_{el} = 2 + \frac{5}{9} = 2.56$。

引进椭圆维数以后，$\beta$模式中的"死"涡旋意味着$\lambda^\alpha = 0$，"活"涡旋意味着 $\lambda^\alpha > 1$。$\alpha$ 模式中的弱涡旋意味着 $0 < \lambda^\alpha < 1$，强涡旋 $\lambda^\alpha > 1$。椭圆维数的定义也包含各向同性情况，对各向同性三维大气，$\alpha = 1$，$d_{el} = 3$；对于各向同性三维大气$\alpha = 0$，$d_{el} = 2$。

# §5 双 曲 分 布

许多地球物理现象有间歇性，而间歇性又常和"双曲分布"

的概率定律相联系。所谓随机变量$\xi$服从双曲分布，即$\xi$大于某数值$x$的概率服从如下规律（也称Levy分布）

$$P_r(\xi>x)\sim x^{-q} \tag{6.13}$$

即随着$x$加大而减少。例如若$\xi$代表某矿种矿床的储量，那么矿床储量愈大则出现的概率愈小。同样，品位愈高的矿床出现的概率也愈小。

大气的风速涨落$\Delta v^2$，位温$\theta$涨落$\Delta\ln\theta$，以及Richardson资料$\Delta\ln\theta/\Delta v^2$的分析表明，它们均服从双曲分布，见图 6.8 (a)，(b)，(c)。

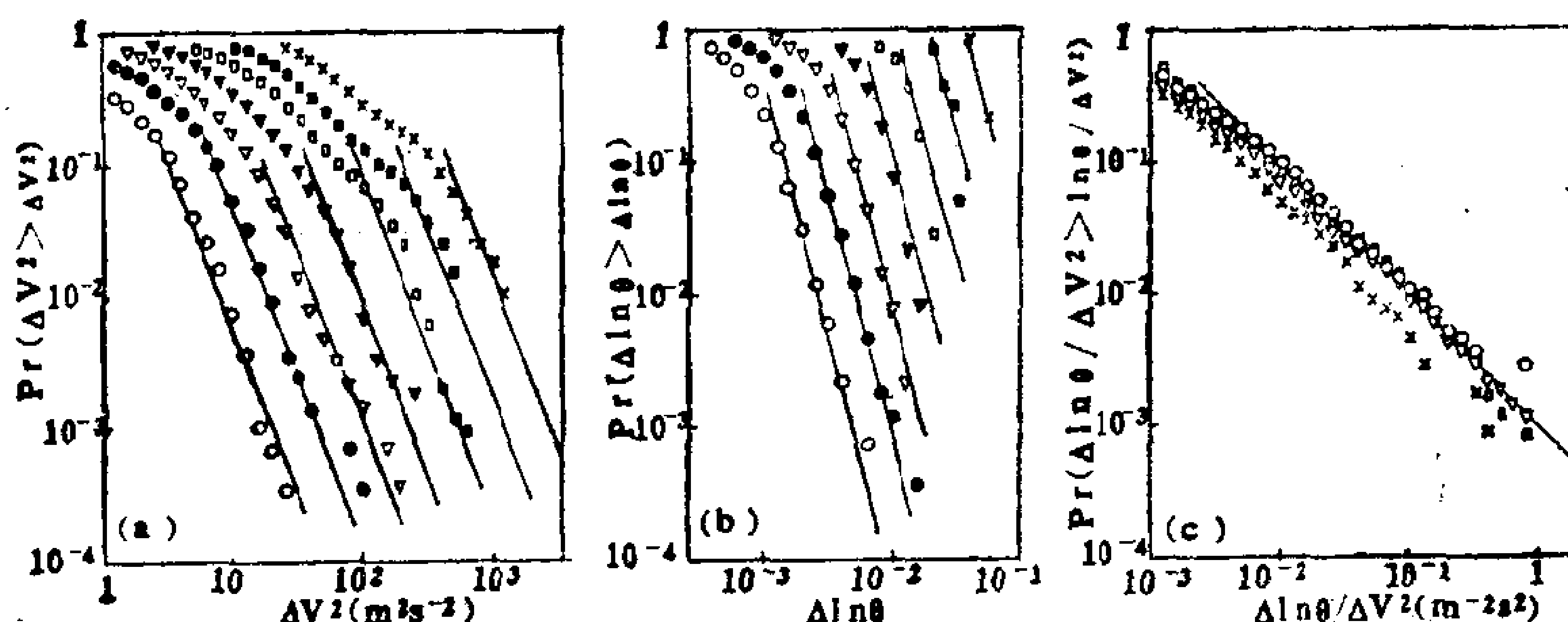



图6.8　$\Delta v^2(\Delta z)$(a)、$\Delta\ln\theta$(b)、$\Delta\ln\theta/\Delta v^2$(c)的概率分布

图中　○代表$\Delta z$=50米，　●代表$\Delta z$=100米
　　　▽代表$\Delta z$=200米，▼代表$\Delta z$=400米
　　　□代表$\Delta z$=800米，■代表$\Delta z$=1600米
　　　×代表$\Delta z$=3200米

从图6.8我们还看出，$\Delta z$是以$\lambda$=2，4，8，16，32，64倍增加时，图中两条线之间的距离都一样，这就是所谓自相似性：

$$X(\lambda\Delta z)=\lambda^{\alpha}x(\Delta z) \tag{6.14}$$

标度指数$\alpha$和双曲指数$q$都很容易从图6.8中求出。由(6.13)式看出，在双对数坐标($\lg P_r$，$\log x$)纸上，该直线的斜率就是$(-q)$，图中两直线之间横坐标的距离按（6.14）式就是$\alpha\log 2$，因而就很容易求出标度指数$\alpha$。

根据图6.8得出

$$\alpha_v = \frac{3}{5} \qquad q_v = 5$$

$$\alpha_{\ln\theta} = \frac{9}{10} \qquad q_{\ln\theta} = \frac{10}{3} \qquad (6.15)$$

$$\alpha_{Ri} = 1 \qquad q_{Ri} = 1$$

实际上，通过因次分析有

$$\Delta v(\Delta z) \sim \phi^{1/5}(\Delta z)\Delta z^{3/5}$$
$$\Delta v(\Delta x) \sim \varepsilon^{1/3}(\Delta x)\Delta x^{1/3} \qquad (6.16)$$

其中 $\phi = \dfrac{\Delta^2(g\ln\theta)}{\tau}$ 是浮力方差通量（$\tau$是特征时间），$\varepsilon$是湍流能量耗散率。由（6.16）式看出，$\alpha_{水平} = \dfrac{1}{3}$，$\alpha_{垂直} = \dfrac{3}{5}$。

## §6 重整化群方法

物理学中的相变也是尺度跨越很宽的现象。以铁磁相变为例，当温度$T$降低到临界温度$T_c$时，粒子磁矩之间的相互作用压倒了随机的热运动而占上风，粒子之间的关联越来越大，从而形成各种尺度“集团”和涨落，在相变点关联长度$\xi$趋向无穷，即

$$\xi \sim (T - T_c)^{-\nu} \qquad (6.17)$$

其中，$\nu$叫临界指数。

将（6.17）式和分数维的定义（2.9）式比较，若把$\xi$理解成（2.9）式中的$r$，$(T-T_c)$理解成（2.9）式中的$N$，则临界指数$\nu$就相当于分数维$D$的倒数。和$D$一样，$\nu$是相变中的不变量。

相变中的重整化群变换方法，就是利用尺子变换将小尺度的涨落平滑掉，即粗粒平均，而在较大尺度的有效作用下来看临界现象。正是由于相变现象中跨越很宽的尺度，局部和整体相似，因而这种变换不影响全局。

现在，令变换为

$$T' = R(T) \tag{6.18}$$

这种变换将尺子$T - T_c$变长为$T' - T_c$，尺子变长了，那么去量度的关联长度$\xi$，按（6.17）式就由$\xi(T)$缩短为$\xi(T')$。

但是在相变点$T_c$上；关联长度$\xi(T_c)$变为无穷，因而$T_c$是重整化群变换（6.18）式的不动点，即

$$T_c = R(T_c) \tag{6.19}$$

将$R(T)$在$T_c$附近Taylor展开

$$R(T) = R(T_c) + \lambda(T - T_c) + \cdots\cdots \tag{6.20}$$

其中

$$\lambda = \left(\frac{dR}{dT}\right)_{T_c} \tag{6.21}$$

又设

$$\xi(T') = \frac{1}{b}\xi(T) \tag{6.22}$$

则

$$\frac{1}{b} = \frac{\xi(T')}{\xi(T)} = \frac{(T' - T_c)^{-\nu}}{(T - T_c)^{-\nu}} \tag{6.23}$$

但由（6.20）式

$$R(T) - R(T_c) \approx \lambda(T - T_c) \tag{6.24}$$

即

$$T' - T_c \approx \lambda(T - T_c) \tag{6.25}$$

故（6.23）式又可以表为

$$\frac{1}{b} = \frac{\lambda^{-\nu}(T - T_c)^{-\nu}}{(T - T_c)^{-\nu}} = \frac{1}{\lambda^{-\nu}} \tag{6.26}$$

则由此导得临界指数

$$\nu = \frac{\log b}{\log \lambda} \tag{6.27}$$

由此可以看出，只要知道变换$R$和不动点$T_c$，则由（6.21）式就可以求到$\lambda$。若又知道尺度变换的方式即$b$值，就可以由（6.27）

式求到临界指数$\nu$这个不变量和分数维$D$值。

为了说明重整化群方法以便将此法用于地球物理学中去，下面我们用线性链渗流和二维点阵渗流为例。

图6.9（a）是一个线性链，链上有一系列格点，其中黑点表示导体，圆点表示绝缘体。显然，只有所有格点全是导体，电流才能通过。现在进行尺度变换(即粗视化)，将图6.9（a）的二个格点归并成一个元胞，见图6.9（b）。这里格点归并成元胞的方式是按“否决权”的方式，即只有元胞中每个格点都是导体（即黑点），元胞才是导体，否则就是绝缘体。由于元胞集团间的长度是原格点长度的2倍，所以相关长度$\xi$就收缩了一半，即$b=2$。


（a）


（b）

图6.9　线性链的格点归并
（•导体，　∘绝缘体）
(a) 原格点 (b) 元胞

下面，我们来研究重整化群变换的方式$R(P)$。其中，$P$是格点导通的概率。那么，$(1-P)$就是格点绝缘的概率。设元胞组态导通的概率为$P'$，则

$$
\begin{aligned}
P' &= P\cdot P+O\cdot P\cdot(1-P)+O\cdot(1-P)\cdot P+O\cdot(1-P)(1-P)\\
&= P^2=R(P) \qquad (6.28)
\end{aligned}
$$

(6.28) 式就是线性链渗流模型的重整化群变换。

现在求该变换的不动点，(6.28)式的不动点就是使(6.28)式左端等于右端，即

$$P=P^2$$

或

$$P^2-P\equiv P(1-P)=0 \qquad (6.29)$$

因而，不动点是

$$P_c=0\text{和}P_c=1 \qquad (6.30)$$

按照映射（6.28）式右边Jacobi矩阵特征值的模是小于1和大于1，来判断不动点是稳定还是不稳定。因（6.28）式右边的Jacobi矩阵是

$$\frac{\partial R}{\partial P}=2P \tag{6.31}$$

（6.31）式也是特征值。

对不动点$P_c=0$，这个特征值为

$$\left.\frac{\partial R}{\partial P}\right|_{P_c=0}=2\cdot0=0 \tag{6.32}$$

因而，$P_c=0$是稳定的不动点

对不动点$P_c=1$，特征值为

$$\left.\frac{\partial R}{\partial P}\right|_{P_c=1}=2=\lambda \tag{6.33}$$

因而超过1，$P_c=1$是不稳定的不动点。

因为变换使$P-P_c$变大，因而离$P_c$愈远，故相变的临界点应该是不稳定的不动点，该模型中应是$P_c=1$。$P_c=1$的意义很清楚，只有每个格点均是导体，那么整个链才是导体。

将（6.33）式中的$\lambda=2$和$b=2$代入（6.27）式，求得临界指数

$$\nu=\frac{\log2}{\log2}=1 \tag{6.34}$$

现在举一个二维渗流模型，见图6.10。

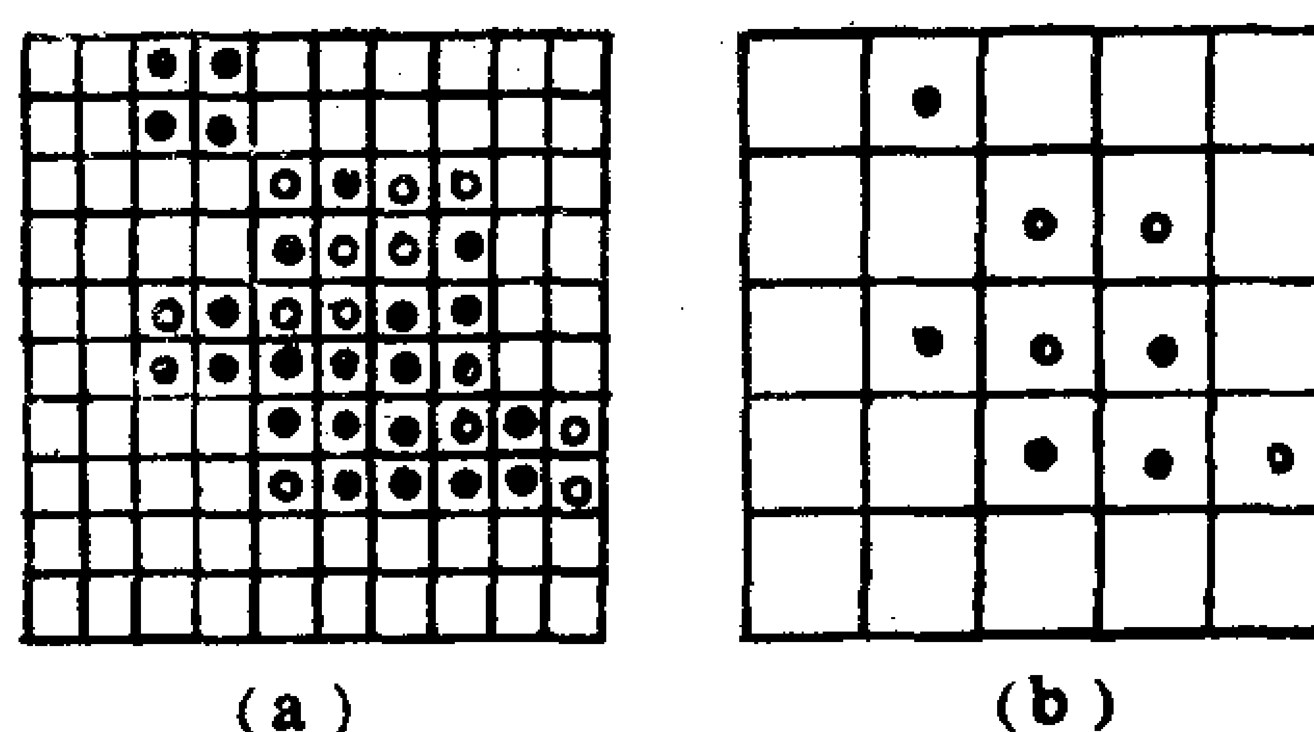


图6.10 二维渗流模型

(a) 原格点 (b) 归并后的元胞

由图6.10看出，图中四个格点归并成一个元胞，格点距离仍加大一倍，即$b=2$。但归并的方式是按“少数服从多数”的原则，而不是象一维情况的“否决权”方式。此时，重整化群变换为

$$P'=R(P)=P^4+4P^3(1-P) \tag{6.35}$$

（6.35）式右边第一项代表四个格点都是金属，第二项代表三个格点是金属的4种可能性。

（6.35）式的不动点，应是解如下四次方程

$$P = P^4 + 4P^3 - 4P^4 \tag{6.36}$$

（6.36）式即为

$$3P^4 - 4P^3 - P = 0 \tag{6.37}$$

或

$$P(P-1)(3P^2 - P - 1) = 0 \tag{6.38}$$

由（6.38）式求得四个不动点：

$$P_c = 0,\ P_c = 1,\ P_c = \frac{1+\sqrt{13}}{6} = 0.768,$$
$$P_c = \frac{1-\sqrt{13}}{6} = -0.434 \tag{6.39}$$

（6.39）式中的$P_c$为负值应不考虑。同时，（6.35）式右端的Jacobi矩阵为

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial P} &= 4P^3 + 12P^2 - 16P^3 \\ &= 12P^2 - 12P^3 \\ &= 12P^2(1-P)\end{aligned} \tag{6.40}$$

对不动点$P_c = 0$，则$\frac{\partial R}{\partial P} = 0$。对不动点$P_c = 1$，则$\frac{\partial R}{\partial P}$也是零，即它们的特征值均小于1。因而$P_c = 0$和$P_c = 1$是两个稳定的不动点，它们不应是临界点。

只有对$P_c = \frac{1+\sqrt{13}}{6} = 0.768$，它的$\frac{\partial R}{\partial P}$的模大于1，因而是不稳定的不动点，是临界点，且

$$\lambda = \left(\frac{\partial R}{\partial P}\right)_{P_c = 0.768} = 12P^2(1-P)\Big|_{P_c = 0.768} = 1.64 \tag{6.41}$$

将（6.41）式和$b = 2$代入（6.27）式，求得临界指数

$$\nu = \frac{\log 2}{\log 1.64} = 1.4 \tag{6.42}$$

## §7　用重整化群方法研究地震

地震虽然复杂，但是用浑沌和分形理论来研究也是一种新的方法。地震的孕育产生过程和岩石断裂过程很相似，地震的断层相应于岩石的断口，地震的时空分布相应于岩石碎块的大小分布，所以可以用岩石断裂来研究地震。地震和岩石断裂一样，均可看成是临界现象，可以用重整化群方法来研究。

图6.11是一个线度为$h$的立方体岩块分成8块线度为$\frac{h}{2}$的小立方体。假设一个立方体破裂成8个小立方体的概率均为$P$。同样线度为$\frac{h}{2}$的碎块破裂成 8 个线度为$\frac{h}{4}$的小立方块的概率也是 $P$，这种过程不断重复下去就形成大小岩块的分形结构。设$N_m$是经过$m$次破裂的碎块总数，那么（$m+1$）次破裂的碎块总数就为

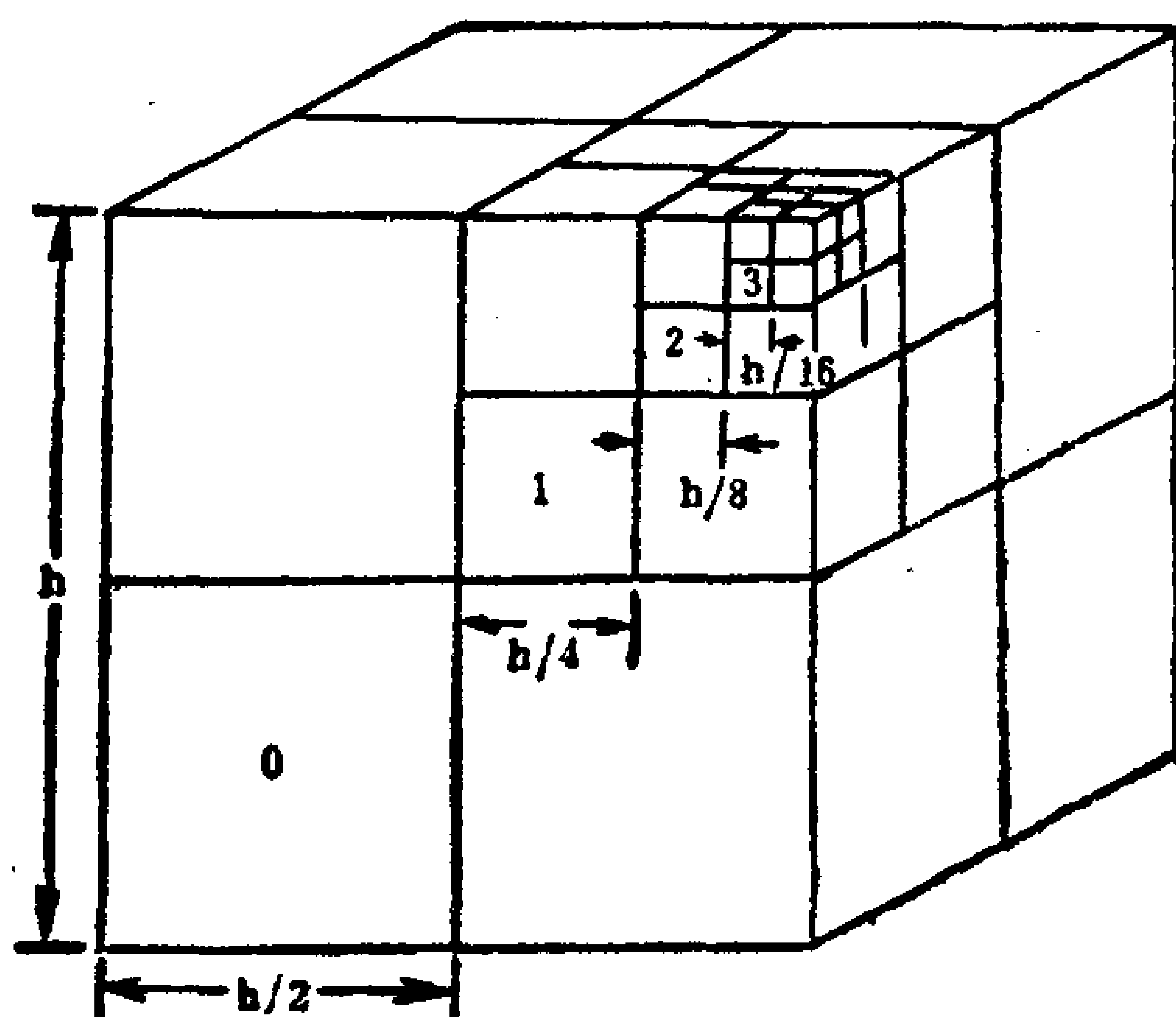



图6.11　分形破裂的理想化模型

$$N_{m+1}=[8P+(1-P)]N_m \qquad (6.43)$$

（6.43）式右端第一项代表破碎成小块的数，右端第二项代表未

破裂成小块的数目。

根据分数维的定义（2.9）式，形成的碎块分布的分形维数应是

$$D=\frac{\log\left(\frac{N_{m+1}}{N_m}\right)}{\log\left(1\Big/\left(\frac{1}{2}\right)\right)}$$

$$=\frac{\log(7P+1)}{\log 2} \qquad (6.44)$$

图6.12给出分形维数随破碎概率$P$的变化曲线。从图6.12看出，若破碎概率 $P=1$，即表示一块变 8 块的过程，此时 $D=3$，这是小立方块的整数维。

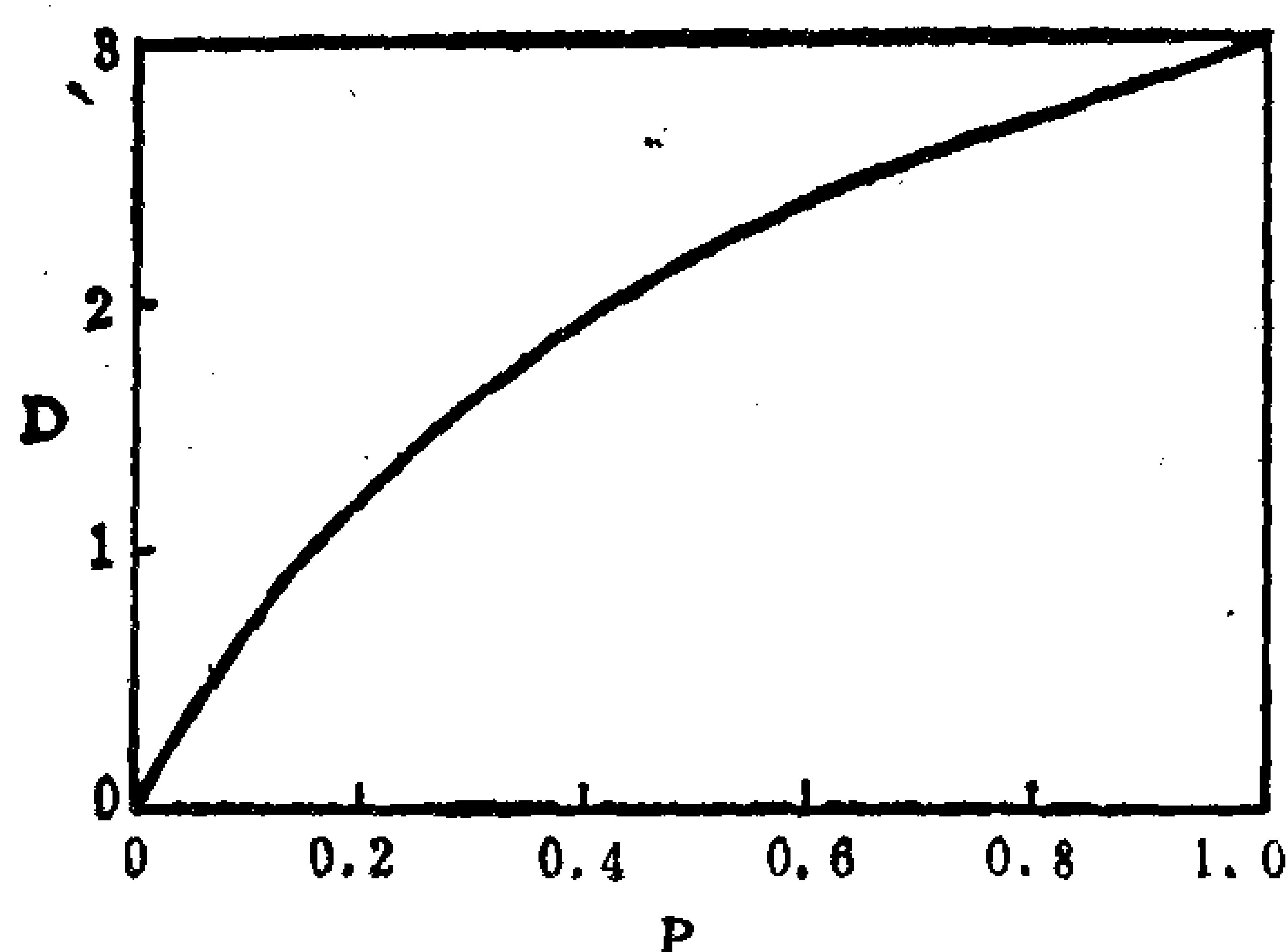



图6.12 分维$D$随概率$P$的变化

图6.13表示一小块破碎成小块有$2^8=256$种可能的情况。小方块下方第一个数目指示破裂成小单方块的数目，英文字母是破裂成相同数目小方块的不同情况，圆括号中的数目表示有多少种情况。破碎块是由该块角上的黑点表示的。图6.14是将图6.13中两种情况放大的示意图。图6.13中所有图号下用黑线划出的表示此单元破碎（假设依已破碎的元胞是否渗透到整个单元，即在单元中形成弱面作为单元破碎准则）。

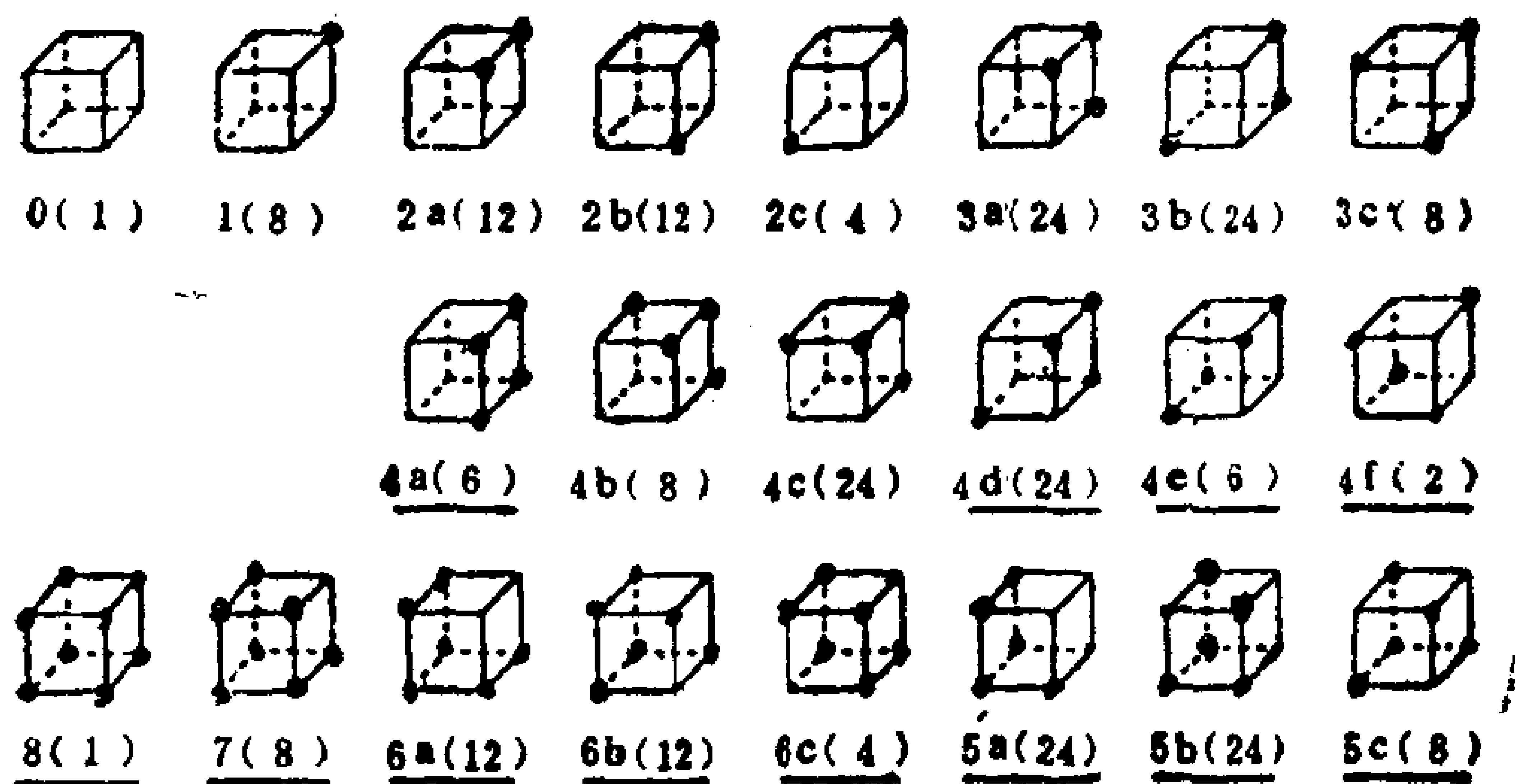



图6.13　$2^8=256$种破裂有22种不同的拓扑配置

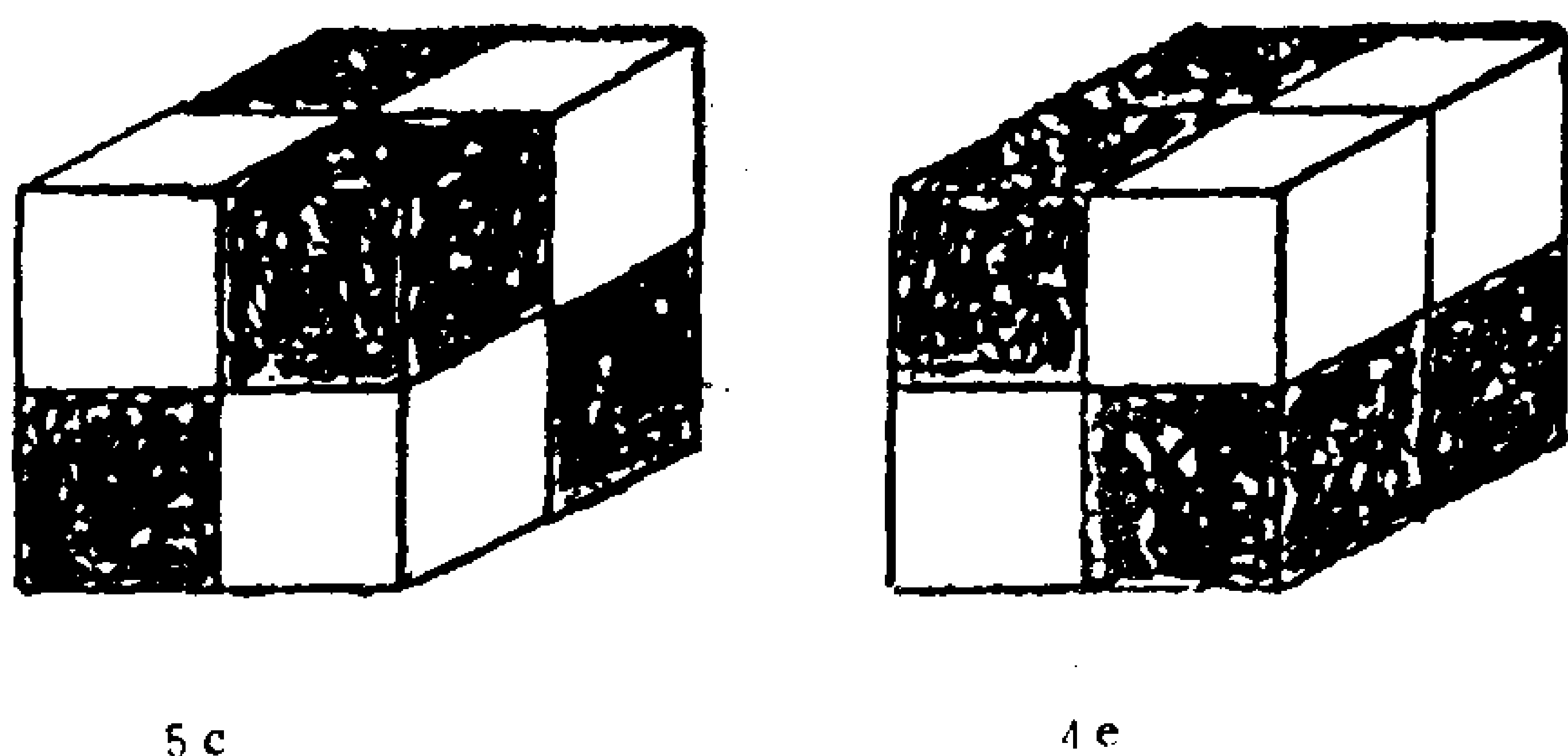



图6.14　图6.13中的两种情况放大

因此

$$\begin{aligned}P_m &= P_{m+1}^8+8P_{m+1}^7(1-P_{m+1})+28P_{m+1}^6(1-P_{m+1})^2\\&\quad+56P_{m+1}^5(1-P_{m+1})^3+38P_{m+1}^4(1-P_{m+1})^4\\&=3P_{m+1}^8-32P_{m+1}^7+88P_{m+1}^6-96P_{m+1}^5+38P_{m+1}^4\end{aligned}\tag{6.45}$$

（6.45）式就是重整化群方程。

很容易看出（6.45）式有不动点 $P_c=0$ 和 $P_c=1$，但它们是稳定的不动点。图6.15给出映射（6.45）式的图象，很容易看出 $P_c=0.49$是另一不稳定的不动点，即是临界点。这个临界点表明，当$P<P_c$时经过重整化群变换，流向稳定不动点$P=0$，即岩石不

会破碎。当$P>P_c$，经过重整化群变换，流向稳定不动点$P=1$，表明岩石破碎。由$P_c=0.49$求出

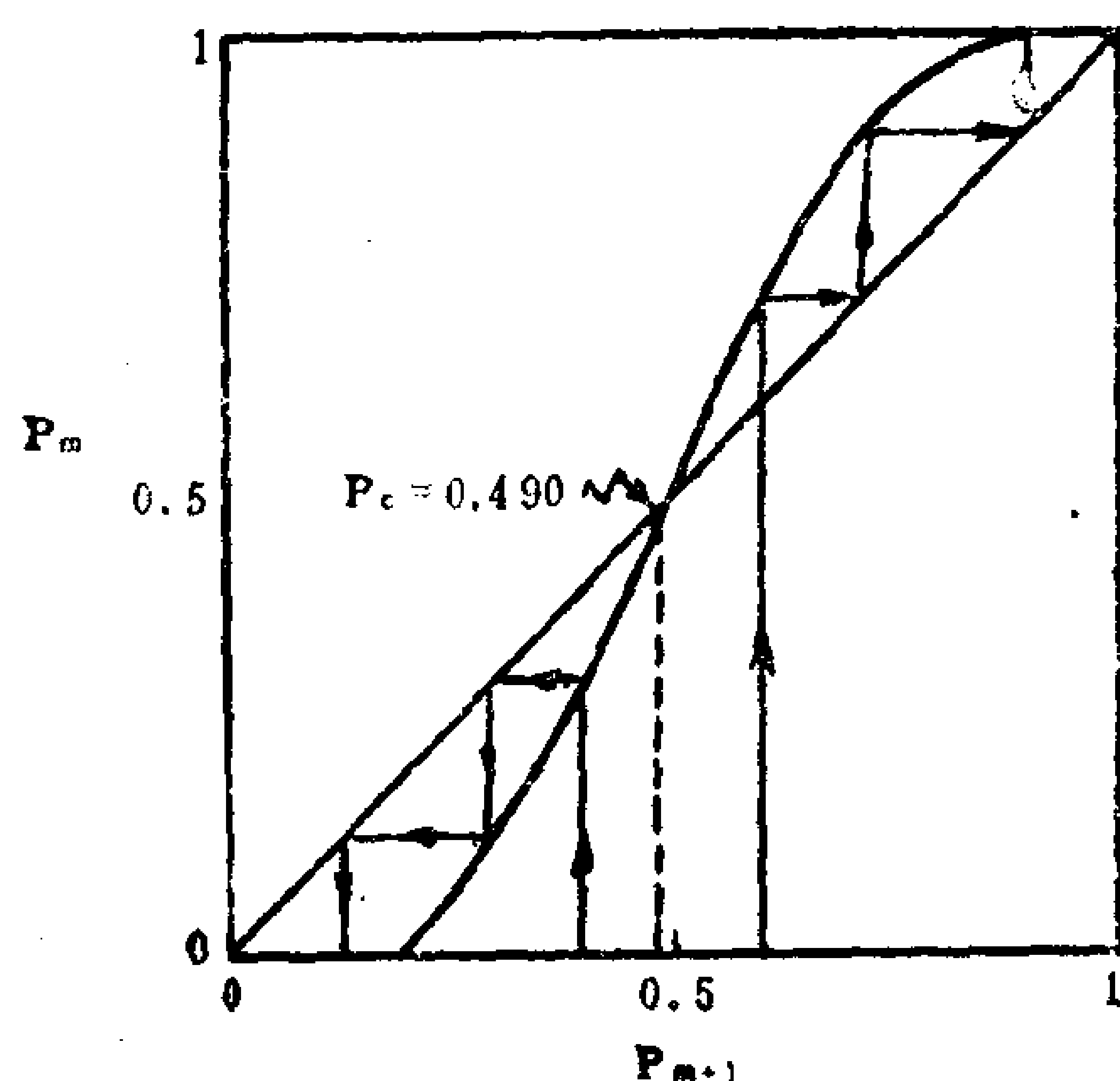



图6.15 重整化群方程（6.45）式的迭代图象

$$D=\frac{\log(7P_c+1)}{\log 2}=2.15 \tag{6.46}$$

## §8 自组织临界现象

地震现象是复杂的，但是很早就知道，震级愈大则发生的次数愈少。震级$m$和频数$N$之间的关系是著名的Gutenberg-Richter关系

$$\log N(>m)=a-bm \tag{6.47}$$

经验表明$b$值非常接近于1，通常$0.8<b<1.5$。同时，又发现断裂带的尺寸$r$和$m$的关系为

$$\log r=m-3.7 \tag{6.48}$$

因此，$N$和$r$的关系为

$$N(>r)\propto r^{-b} \tag{6.49}$$

(6.49) 式是一个幂函数关系。

又因为地震能量$E$随震级增加而增加，即

$$\log E = c + dm \qquad (6.50)$$

所以，$N$和$E$的关系为

$$N \propto E^{-\frac{b}{d}} \qquad (6.51)$$

(6.51) 式中幂函数的幂大约在－1.2和－1.7之间。

这种幂函数的规律以及在自然界出现的“$1/f$”噪声规律是什么原理呢？这似乎和临界现象有联系，现在常用“自组织临界性”来解释。自组织临界性的最简单模型，就是沙堆和地震模型。

在平面上一次一粒地往下堆沙子，慢慢就形成沙堆，这样堆沙子不致使沙堆太陡（即不稳定）或太平（即稳定），而使加入沙粒数量和落到边缘以外的沙粒数量在总体上达到平衡时，沙堆就停止增长，系统达到了临界状态。这种临界性和相变现象在相变点的临界性不同，它是内部各部分相互作用而形成的自组织，不是要求外部的压强或温度条件。两者相同处在于在非临界点处自相关函数是指数下降的，而在临界点处是幂函数。由于系统处在亚稳态，所以加一粒沙子的随机性通过动力过程加以放大使沙堆坍方可以在各种尺度上发生。即小坍方和大坍方都是一种机理。

地震的幂函数规律 (6.51) 式说明大小地震次数的关系是有规律的。因此可以想象大小地震产生于相同的机械过程。通常，假定地震是由粘滑机制引起的。地壳的某些区域粘附在一起，由于挤压产生断层，板块沿断层相对滑动，应力释放并传向邻近区域。

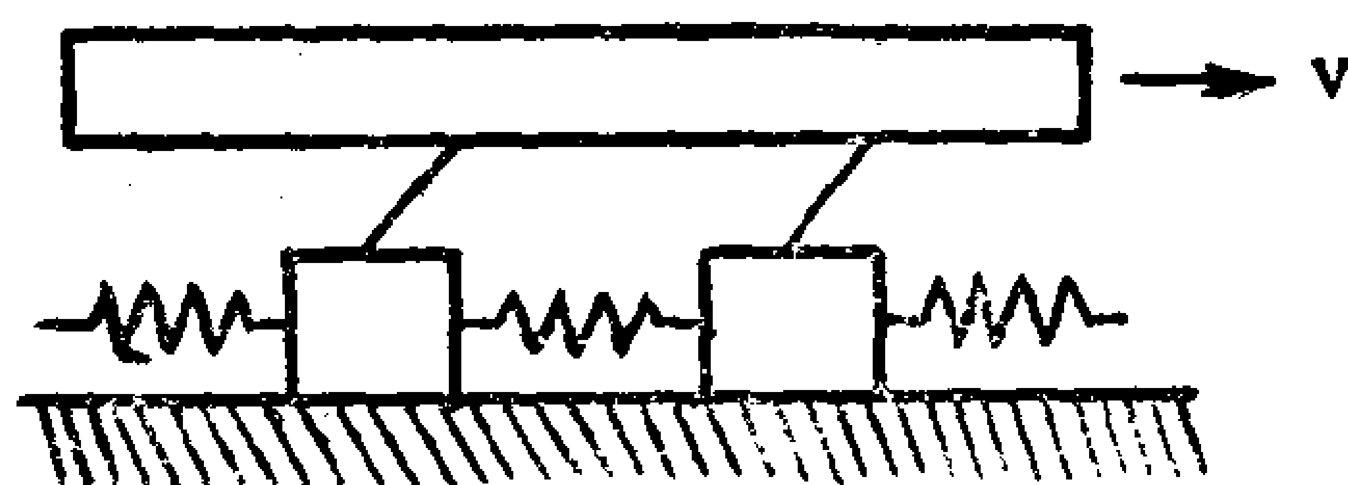


图6.16 地壳沿断层的粘滑模型

图6.16是沿断层带的地壳粘附和滑动的Burridgt 和Knopotf模型。块体由弹簧互相连结，同时依靠其它弹簧块体链被驱使和断层作恒速（速度是$V$）运动。当断层移动时，块之间处

在粘附状态。一旦弹簧力大于静摩擦力，此时一个或多个块体即刻全部滑动，即发生了地震。直到弹簧力释放为止。这里断层滑动的力就相当于加沙子，应力释放就相当于加一粒沙子后引起周围点上沙子滑掉而产生的高度差变化。

图6.17是重现地震特征的计算机地壳模型。由许许多多二维方块组成的弹性板放在一个刚性板上。当这个方块阵受到挤压时，弹簧就在板块上作用一个正比于压缩量的力。作用于某个特定方块上的力只要超过一临界值，板块就开始滑动（图中白色方块），一组白色方块就代表一次地震。直到弹簧力减少到临界值以下，方块所失去的力均匀传给它的四邻。图6.17的右边是统计出的地震次数（或地震次数分布函数$D(r)$）和释放能量（或断裂尺寸$r$）的关系：

$$D(r) \sim r^{-\tau} \tag{6.52}$$

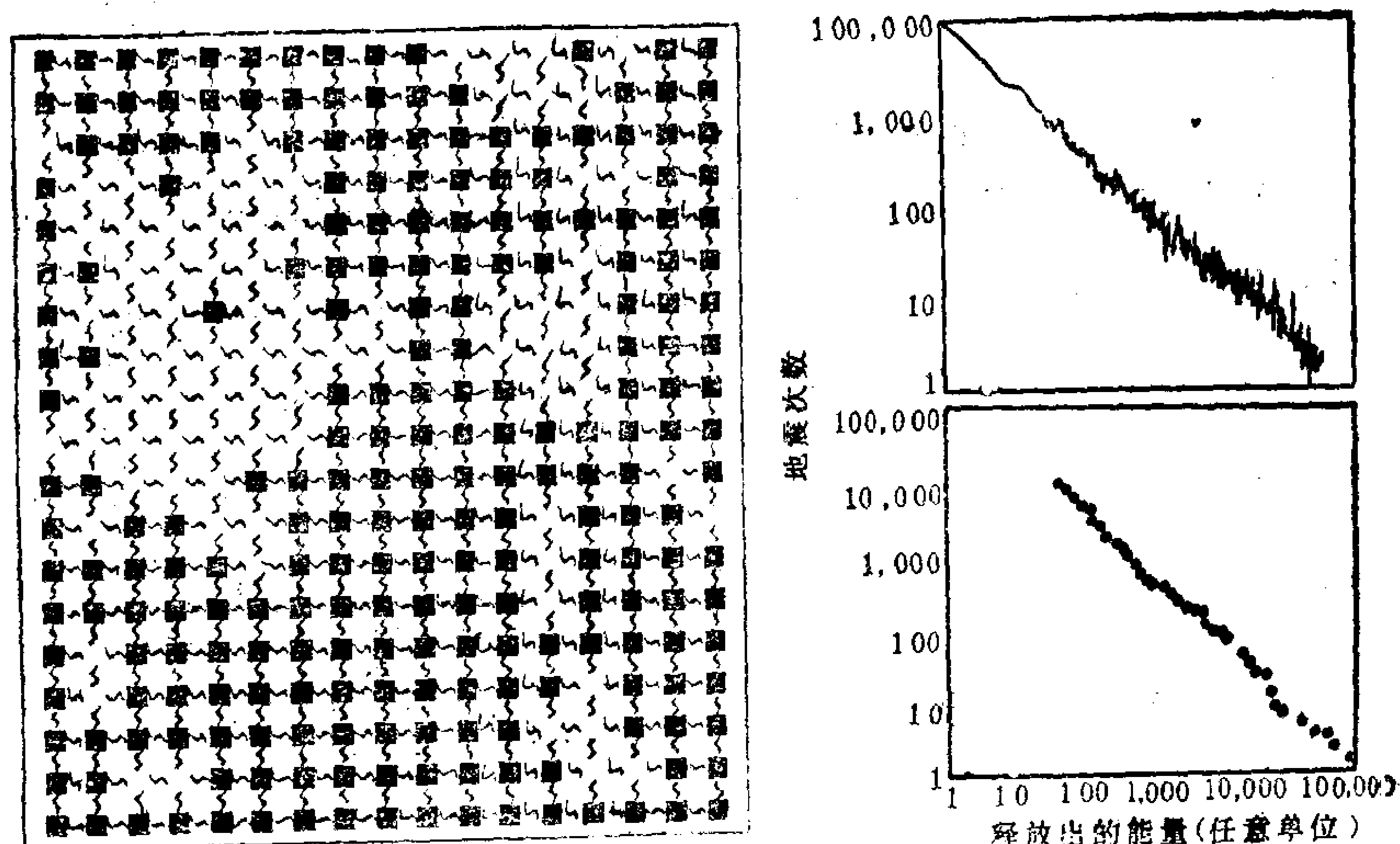



图6.17 粘滑地震模型及其模拟结果

从图上看出这个$\tau$值约为1.5，和（6.51）式的幂次相一致。这意味着某地区一年中发生能量为100（以某种单位表示)的地震，那

么这一地区这一年中就将经历大约1000次能量为 1 的小地震。$\tau$ 的分数值，反映了沙堆或地震的分数维的自相似结构。

由于系统处于亚临界状态，一个局部的扰动最终将由于“domino”（多米诺骨牌)效应而遍及整个沙堆，因此无特征尺度也直接导致无特征时间尺度，即张弛时间分布为

$$D(T) \sim T^{-a} \tag{6.53}$$

（6.53）式的分布是很重要的，因为若自相关函数 $c(t)$ 是指数衰减，即

$$c(t) = e^{-\frac{t}{T}} \tag{6.54}$$

那么，它的傅里叶变换——功率谱 $S(f)$ 是褐色噪声

$$S(f) \sim f^{-2} \tag{6.55}$$

这不符合自然界大量存在的“$\frac{1}{f}$噪声”，即

$$S(f) \sim f^{-\beta} \tag{6.56}$$

其中

$$0.5 < \beta < 1.5 \tag{6.57}$$

由于（6.53）式的分布使 $T$ 小的贡献大，从而有可能用（6.53）式来加权求功率谱而使 $\beta$ 减少。这就是说，把求功率谱的式子

$$S(f) = \int_0^\infty c(t) e^{ift} dt \tag{6.58}$$

改为

$$S(f) = \int_0^\infty \left( \int_0^\infty e^{-\frac{t}{T}} e^{ift} dt \right) D(T) dT \tag{6.59}$$

（6.59）式积分结果为

$$S(f) = \int_0^\infty \frac{T}{1 + f^2 T^2} T^{-a} dT$$

$$\propto f^{-2+a} \tag{6.60}$$

也就是说经过加权平均，功率谱指数变成

$$\beta = +2 - a \tag{6.61}$$

由于$0<\alpha<1$，这就有可能使

$$1<\beta<2 \tag{6.62}$$

因此"$\frac{1}{f}$噪声"就和空间分维自相似结构同时产生，都是自组织临界现象的产物。分形可以看成是自组织临界过程的"快照"，"$1/f$噪声"是自组织临界现象的"指纹"。

# 第七章　同宿和异宿轨道
# ——孤立波和冲击波

孤立波是物理系统中常见的一种波动。同宿轨道(homoclinic orbit)是动力系统中当$t\to\infty$和$t\to-\infty$时趋向同一状态的一种轨道（$t\to-\infty$和$t\to+\infty$时的极限状态分别称为该轨道的$\alpha$极限集和$\omega$极限集）。孤立波满足偏微分方程（也可能为无穷维动力系统），同宿轨道一般对常微分方程而言（可称为有限维动力系统）。在研究非线性动力学的今天，这两者有必然的联系。同宿或异宿轨道又是产生浑沌的重要条件，它们的摄动又是形成伸长折迭分形的重要条件。孤立波和冲击波又常和湍流相伴而生。因此同宿或异宿轨道的研究是极其重要的。

## §1　同宿轨道

偏微分方程的一种特殊解就是行波解。我们以著名的$K_dV$方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \qquad (7.1)$$

为例来说明。方程（7.1）中包含非线性项$u\dfrac{\partial u}{\partial x}$和频散项$\beta\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$。

设方程（7.1）的行波解为

$$u(x,t)=u(\xi)\qquad \xi=x-ct \qquad (7.2)$$

其中$c$是波速，取为常数。

（7.2）式代入方程（7.1）中，$K_dV$方程就化为下列常微分方程

$$\beta \dddot{u} + u\dot{u} - c\dot{u} = 0 \tag{7.3}$$

式中符号“·”表示对$\xi$的微商。

方程（7.3）对$\xi$积分一次得

$$\beta \ddot{u} + \frac{1}{2}u^2 - cu = A \tag{7.4}$$

其中$A$是积分常数。

（7.4）式乘以$\dot{u}$后再对$\xi$积分一次有

$$\frac{1}{2}\dot{u}^2 + F(u) = 0 \tag{7.5}$$

其中

$$F(u) = \frac{1}{6\beta}(u^3 - 3cu^2 - 6Au - 6B) \tag{7.6}$$

（7.4）式等价于下列一阶方程组

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = \dfrac{1}{\beta}\left(-\dfrac{1}{2}u^2 + cu + A\right) \\ \quad = -F'(u) \end{cases} \tag{7.7}$$

（7.6）式和（7.7）式中的$F(u)$代表保守系统（7.4）式中的位能。若位能$F(u)$曲线有一个极大值和一个极小值，见图7.1($a$)，其位能极大值在相平面$(u,v)$上对应的是不稳定的鞍点，位能极小值在相平面$(u,v)$上对应的是中心点，见图7.1($b$)。那么在区间

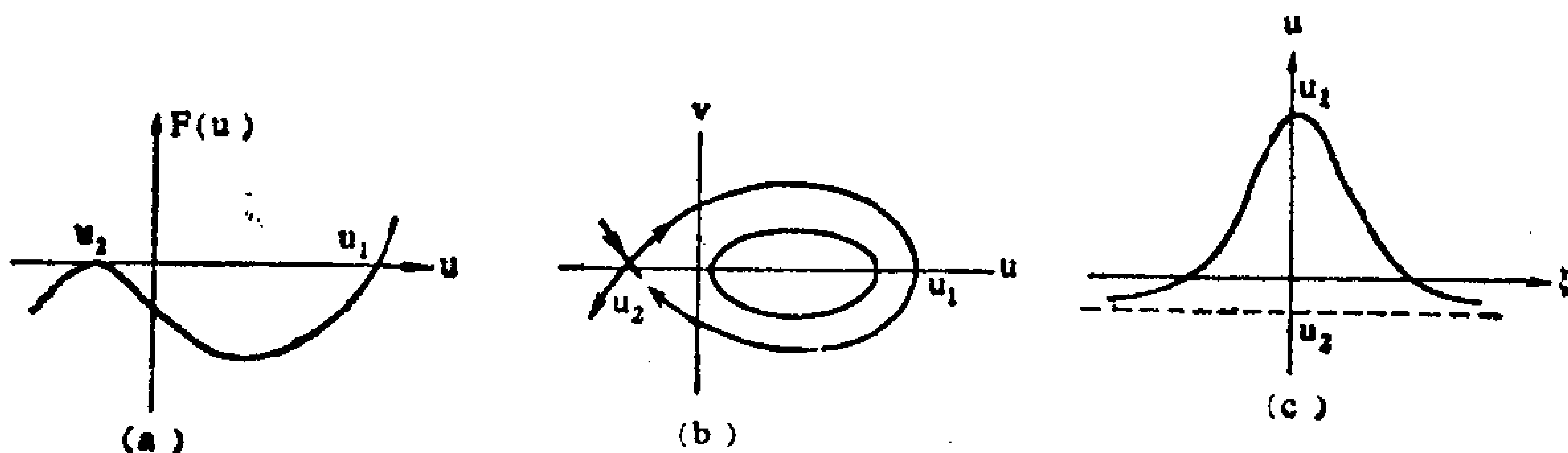



图7.1　同宿轨道和孤立波

(a) 位能$F(u)$曲线 (b) 相平面轨线

(c) 孤立波

$(u_2, u_1)$ 内$F(u)<0$,在相平面上从鞍点$u_2$出发经过$u_1$ 又回到鞍点$u_2$的轨道就是同宿轨道。同宿轨道内的轨道是椭圆 轨道，再向内离中心点很近的轨道是圆轨道。

很易证明椭圆轨道的解为

$$u = u_2 + (u_1 - u_2) cn^2 \sqrt{\frac{u_1 - u_2}{12\beta}} \xi \tag{7.8}$$

其中 $cn$表示椭圆余弦函数。

当椭圆函数的模数$m \to 0$时$cn \to \cos$,(7.8)式 即化为余弦函数的解，它就是正余弦波，对应于图7.1(b)中的圆轨道。当椭圆函数的模数$m \to 1$时$cn \to \mathrm{sech}$，（7.8）式即化为

$$u = u_2 + (u_1 - u_2) \mathrm{sech}^2 \sqrt{\frac{u_1 - u_2}{12\beta}} \xi \tag{7.9}$$

它就对应于相平面上的同宿轨道，(7.9)式就是著 名 的孤立波。

由（7.9）式，当$\xi \to \pm\infty$时，$u \to u_2$因而鞍点$u_2$是同宿轨道的$\alpha$和$\omega$极限集，也称同宿点。

## §2 异 宿 轨 道

从前面分析中我们看到，偏微分方程的行波解可化为常微分方程，前者的孤立波相应于后者的同宿轨道。

除了同宿轨道外，还有一种异宿轨道(heteroclinic orbit)。我们以Sine-Gordon方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_0^2 \sin u = 0 \tag{7.10}$$

为例来说明。

将行波解（7.2）代入方程（7.10），sine-Gordon 方程（7.10）就化为常微分方程

$$\ddot{u} + k^2 \sin u = 0 \tag{7.11}$$

其中

$$k^2=\frac{f_0^2}{c^2-c_0^2}>0 \quad (c^2>c_0^2) \tag{7.12}$$

（7.11）式就是单摆方程。

（7.11）式乘以 $\dot{u}$，再对$\xi$积分一次有

$$\frac{1}{2}\dot{u}^2+V(u)=0 \tag{7.13}$$

其中 $$V(u)=-k^2\cos u+B \tag{7.14}$$

相当于保守系统（7.11）中的位能，式中$B$为积分常数。保守系统（7.11）可以化为一阶方程组

$$\begin{cases}\dot{u}=v\\ \dot{v}=-k^2\sin u\end{cases} \tag{7.15}$$

动力系统（7.15）式有两个定常状态

$$\begin{array}{l}\text{中心点 }(0,0)\\ \text{两个鞍点 }(-\pi,0),\ (\pi,\ 0)\end{array} \tag{7.16}$$

（7.16）式中中心点对应于位能$V(u)$的极小值，鞍点对应于$V(u)$的极大值。相平面$(u,v)$上的轨道见图7.2(a)

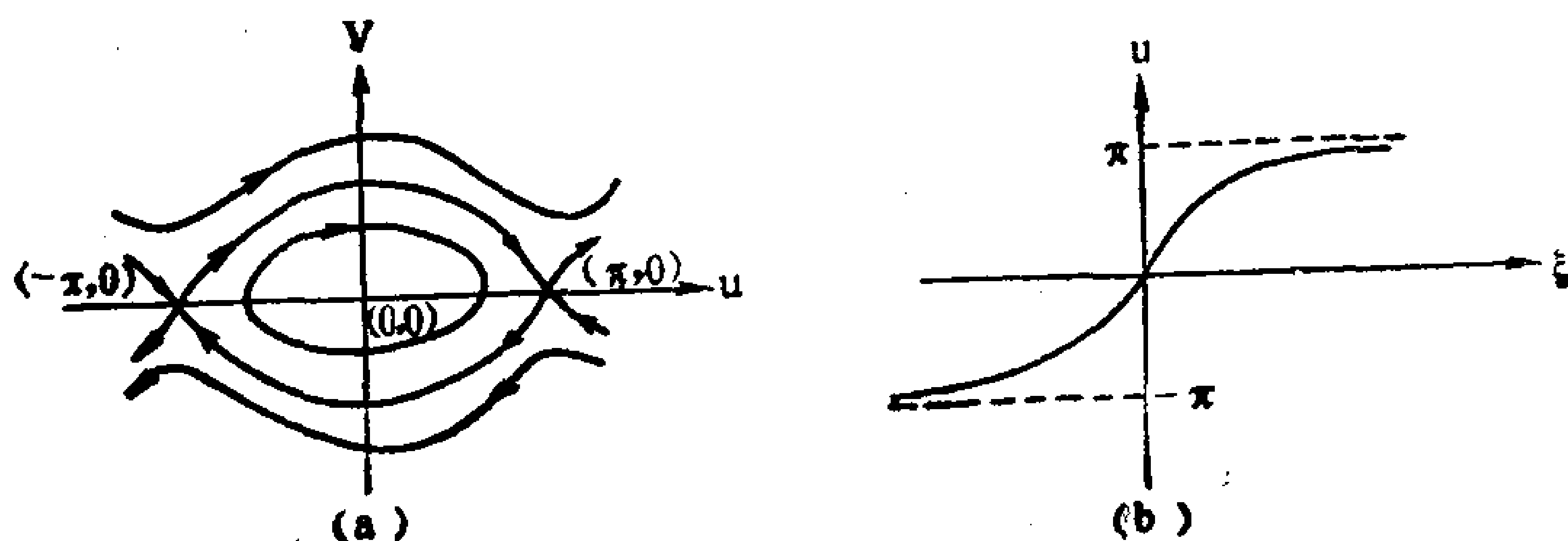



图7.2

(a) Sine-Gordon方程的相图（$k^2>0$）
(b) 冲击波

和相平面图7.1(b)类似，此时围绕中心点的相轨道是一个椭圆族，解类似（7.8）式可以用椭圆函数表示。而从鞍点$(-\pi,0)$到鞍点$(\pi,0)$以及从鞍点$(\pi,0)$到鞍点$(-\pi,0)$的轨道（它们分别

对应于$v>0$和$v<0$）就是异宿轨道，它的解为

$$\sin\frac{u}{2}=\pm\tanh k\xi \tag{7.17}$$

$$v=\dot{u}=\pm 2k\,\mathrm{sech}\,k\xi \tag{7.18}$$

由（7.17）式，我们描绘出$u$随$\xi$的变化图，其一支见图7.2(b)，它称为冲击波。

所以Sine-Gordon方程(7.10）的冲击波解就对应于动力系统（7.11）式或（7.15）式的异宿轨道。图7.2中的两个鞍点分别是异宿轨道的$\alpha$极限集和$\omega$极限集。这个异宿轨道也叫分型线(separatrix)，它将内部振动和外部旋转分开。

由（7.18）看出，冲击波的微商就是孤立波。所以广义的孤立波包含着冲击波。

## §3 鞍-结和鞍-焦异宿轨道

前面已经指出：同一鞍点相联结的轨道是同宿轨道，它对应于孤立波；不同鞍点相联结的轨道是异宿轨道，它对应于冲击波。除此之外，还有鞍点和结点之间，鞍点和焦点之间相联结的异宿轨道。由于结点和焦点只在耗散系统中出现，所以鞍-结和鞍-焦异宿轨道只在耗散系统中出现。

例如$K_dV$—Burgers方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{7.19}$$

（7.19）式的行波解满足下列方程组

$$\begin{cases}\dot{u}=v\\ \dot{v}=\dfrac{\nu}{\beta}v-\dfrac{1}{2\beta}(u^2-2cu-2A)\end{cases} \tag{7.20}$$

其中$A$为积分常数。

方程组(7.20）有两个定常状态：

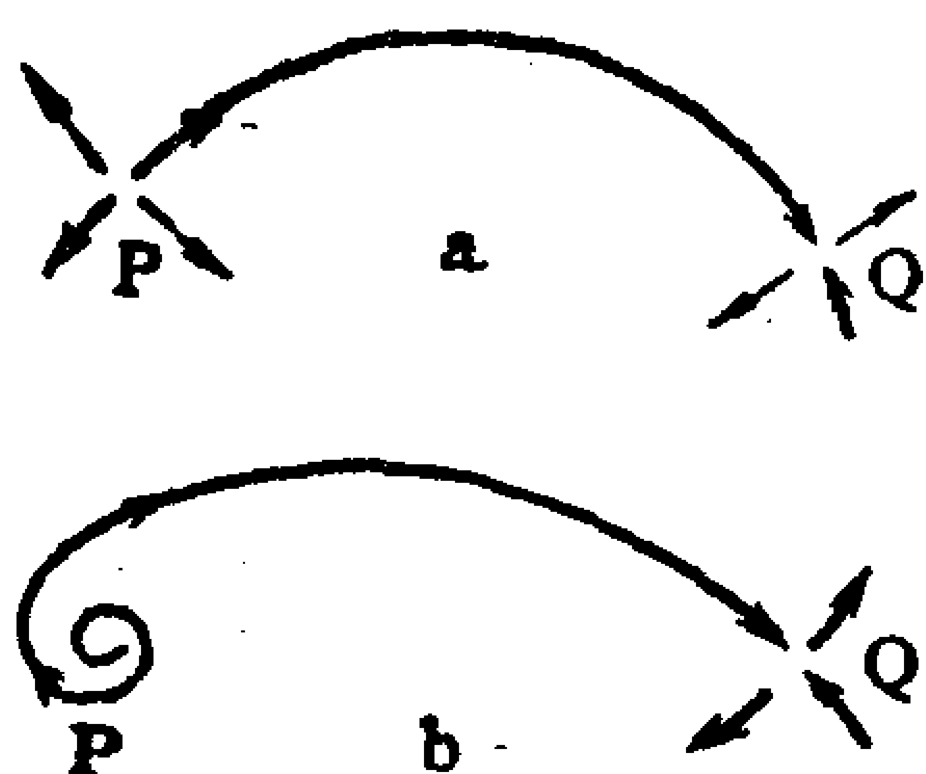


图7.3 鞍-结和鞍-焦异宿轨道

$$P(u_1,0)\text{和}Q(u_2,0) \qquad (7.21)$$

很易说明，当$\nu^2>4\beta\sqrt{c^2+2A}$(即耗散>频散）时，$P$是不稳定结点，$Q$是鞍点（见图7.3$a$）。当$0\leqslant\nu^2\leqslant4\beta\sqrt{c^2+2A}$（即耗散<频散）时，$P$是不稳定焦点，$Q$是鞍点（见图7.3b）。$P$点和$Q$点之间的异宿轨道如图7.3所示。它们所对应的行波解（冲击波）的形式见图7.4。

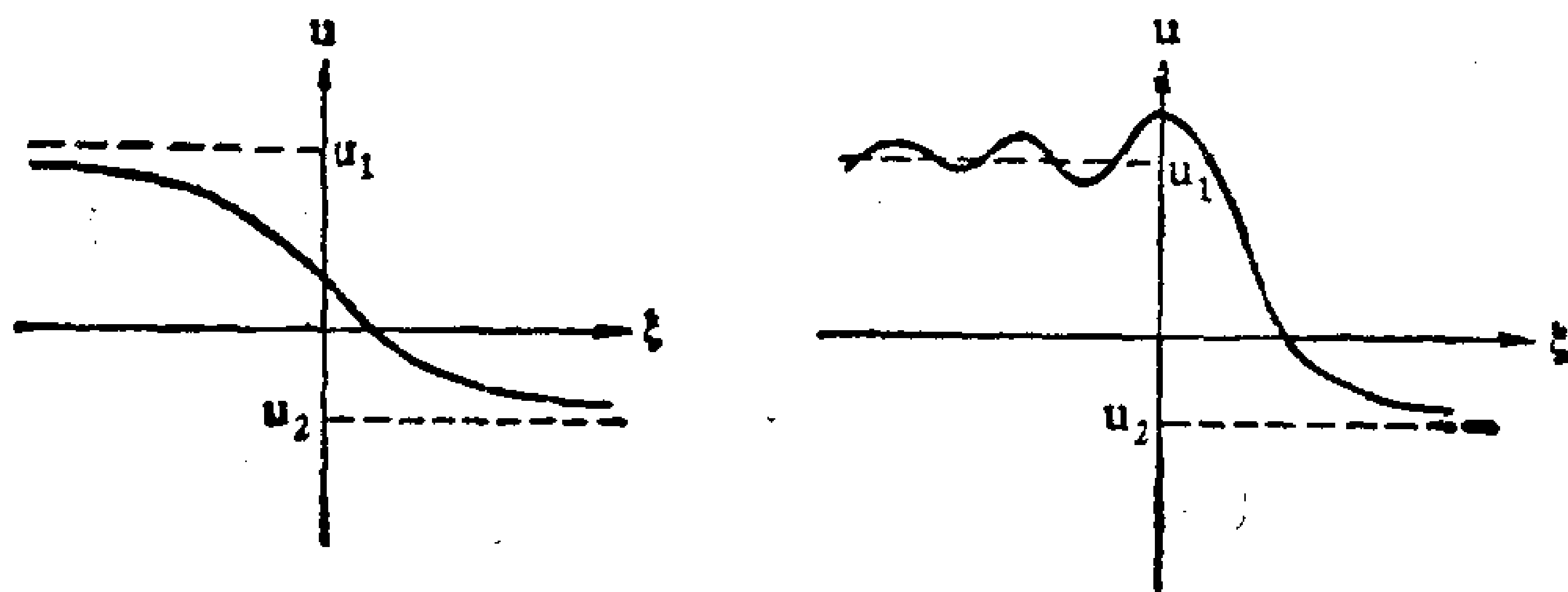


图7.4 鞍-结、鞍-焦冲击波

方程（7.19）的鞍-结冲击波解为

$$u(\xi)=u_1-\frac{12\nu^2}{25\beta}\cdot\frac{1}{[1+e^{-\frac{\nu}{5\beta}(\xi+\xi_0)}]^2}$$

$$=u_1-\frac{12\nu^2}{25\beta}\left[\frac{1}{2}\left(1+\tanh\frac{\nu}{10\beta}(\xi+\xi_0)\right)\right]^2 \qquad (7.22)$$

它是在$\nu^2=\frac{25}{6}\beta\sqrt{c^2+2A}>4\beta\sqrt{c^2+2A}$条件下得到的。

至于$P$，$Q$之间的鞍-焦异宿轨道解，图7.3(b)的上半段和孤立波相似，下半段相交于衰减振荡，并把上下段联结起来就形成KdV-Burgers方程的鞍-焦冲击波解

$$u(\xi)=\begin{cases}u_1+\dfrac{u_1-u_2}{2}e^{\frac{\nu}{2\beta}\xi}\cos\dfrac{\sqrt{2\beta(u_1-u_2)-\nu^2}}{2\beta}\xi,(-\infty,0)\\[2ex] u_2+\dfrac{3(u_1-u_2)}{2}\ \mathrm{sech}^2\sqrt{\dfrac{u_1-u_2}{8\beta}}\xi,(0,+\infty)\end{cases}\tag{7.23}$$

(7.23) 解是在 $0\leqslant\nu^2<4\beta\sqrt{c^2+2A}$ 条件下得到的。

虽然当耗散不存在，即 $\nu=0$ 时，那么 $\mathrm{K_dV}$-Burgers 方程 (7.19)就化为 $\mathrm{K_dV}$方程（7.1），此时$P$就由焦点变成 中心点，$Q$点仍然是鞍点，从鞍点$Q$出发又回到$Q$点的 同 宿轨道就对应于孤立波。

## §4　反应扩散方程中的同（异）宿轨道

反应扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(u)\tag{7.24}$$

由于有耗散项，就有可能存在结点和焦点。

在（7.24）式中当

$$f(u)=ku(1-u)\tag{7.25}$$

时就称为Fisher方程。

在$f(u)=0$有两个根时，例如Fisher方程的$f(u)=0$的两根为 $u_1=0$和$u_2=1$。则当$c>c_{min}=2\sqrt{\nu f'(0)}$ 时有鞍-结异宿轨道，当 $c<c_{min}$ 时是鞍-焦异宿轨道，见图7.5。

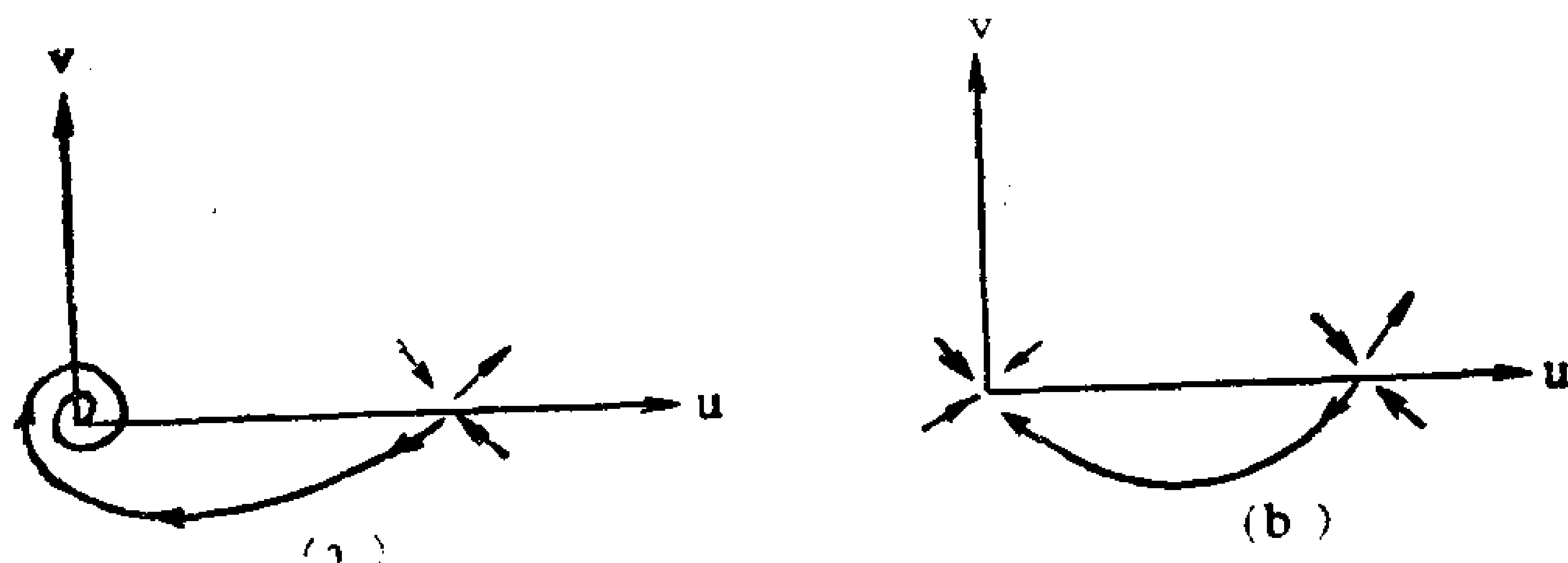



图7.5　Fisher方程的鞍-焦（a）和鞍-结（b）异宿轨道

当$f(u)=0$有三个根时，例如$f(u)=0$ 的三个根设为$u_1=0$，$u_2=1$，$u_3<0$，此时有两对异宿轨道，见图7.6。

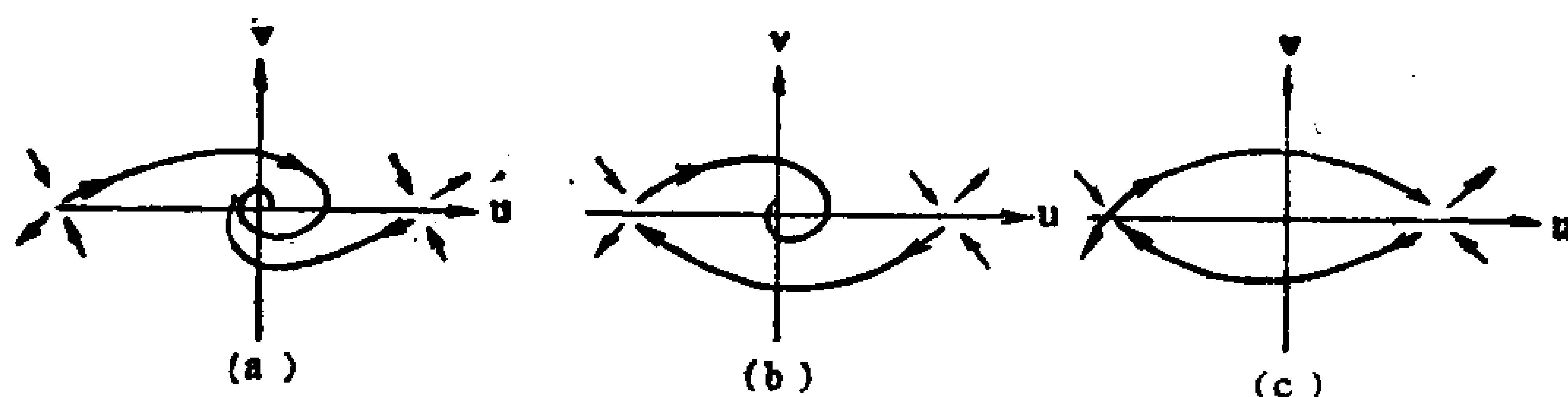



图7.6 反应扩散方程$f(u)$是三次多项式时的异宿轨道

(a) $c<c_{min}$，两对鞍-焦异宿轨道

(b) $c=c_{min}$，鞍-焦和鞍-鞍异宿轨道

(c) $c=0$，两对鞍-鞍异宿轨道

对Fischer方程鞍-结冲击波的解为

$$u(\xi)=\frac{1}{[1+e^{\frac{c}{5\nu}(\xi+\xi_0)}]^2}=\left[\frac{1}{2}\left(1-\tanh\frac{c}{10\nu}(\xi+\xi_0)\right)\right]^2 \tag{7.26}$$

(7.26) 是在$c^2=\frac{25}{6}\nu k>4\nu k$的条件下得到的。

## §5 Schrödinger方程中的同（异）宿轨道

非线性Schrödinger方程

$$i\frac{\partial u}{\partial t}\pm\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+au+|u|^2u=0 \tag{7.27}$$

将有如下形式的波包解

$$\phi(\xi)e^{i\left[\pm\frac{c}{2}(\xi+\omega_0)t\right]} \tag{7.28}$$

其中$\phi(\xi)$是实函数，$\xi=x-ct$。将 (7.28) 代入 (7.27) 得到

$$\pm\ddot{\phi}+b\dot{\phi}+\phi^3=0 \tag{7.29}$$

其中 $$b = a - \omega_0 \mp \frac{c^2}{4} \tag{7.30}$$

方程（7.29）化为如下方程组

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \phi \\ \pm\dot{\phi} = -b\phi - \phi^3 \end{cases} \tag{7.31}$$

（7.31）进行相平面$(\phi,\phi)$分析，当$\dot{\phi}$前取＋号，且$b<0$时，在相平面（$\phi,\phi$）上有两个中心点

$$(-\sqrt{|b|},\ 0)\ 和\ (\sqrt{|b|},0) \tag{7.32}$$

和一个鞍点

$$(0,0) \tag{7.33}$$

因而从鞍点出发，围绕两个中心点形成两条同宿轨道，它们分别对应于孤立波解

$$\phi = \pm\sqrt{2|b|}\ \mathrm{sech}\,[\sqrt{|b|}\,(\xi - \xi_0)] \tag{7.34}$$

但是当（7.31）式前$\dot{\phi}$取“－”号，且$b<0$时，在相平面（$\phi,\phi$）上是两个鞍点和一个中心点，即（7.32）式的中心点变成鞍点，（7.33）式的鞍点变成中心点。此时形成两条异宿轨道，它们分别对应于冲击波解，见图7.7。

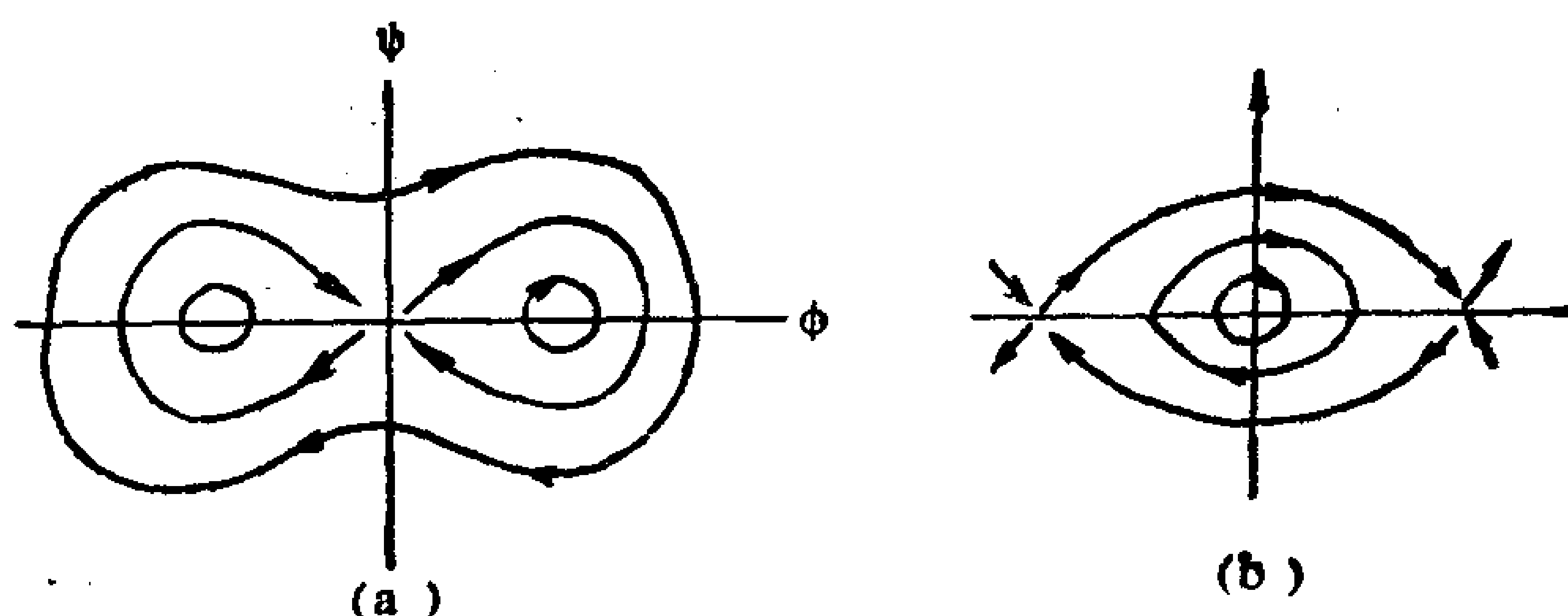



图7.7 Schrödinger方程的相平面轨线

(a) $\dot{\psi} < -b\dot{\psi} - \dot{\phi}^3$, $b<0$

(b) $\dot{\psi} = -b\dot{\psi} - \dot{\phi}^3$, $b<0$

## §6 碰撞等离子体的激波

在一个暖电子、冷离子等离子体碰撞时，其运动方程类似于$K_dV$-Burgers方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\nu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0 \tag{7.35}$$

其中$\nu$是由于电子与离子碰撞引起耗散的无因次测度。

将行波解代入上式以后得到

$$-c\dot{u}+u\dot{u}+\frac{1}{2}\dddot{u}+\nu c\ddot{u}-\nu u\ddot{u}-\nu\dot{u}^2=0 \tag{7.36}$$

积分一次，则可表为

$$\ddot{u}=2\nu(u-c)\dot{u}-(u-u_1)(u-u_2) \tag{7.37}$$

其中$u_{1,2}$和积分常数$A$的关系为

$$u_{1,2}=c\pm\sqrt{c^2+A} \tag{7.38}$$

作变数代换：

$$u=\alpha(v-1)+c \quad \xi=\frac{\eta}{\sqrt{\alpha}}$$
$$\alpha=\sqrt{c^2+2A} \qquad \delta=2\nu\sqrt{\alpha} \tag{7.39}$$

则（7.37）化为一阶方程组

$$\frac{dv}{d\eta}=w$$
$$\frac{dw}{d\eta}=\delta(v-1)w-v(v-2) \tag{7.40}$$

在相平面$(v,w)$上，无耗散时$(\delta=0)$有两个定常状态

$$(0,0)\text{和}(2,0) \tag{7.41}$$

其中（0,0）是鞍点，（2,0）是中心。

但是当存在耗散，在$0<\delta<2$时，以上的中心点就变成焦点，

而在$\delta>2$时就变成结点。这一结论和Burgers-K$_d$V方程的结论一致。

也就是说在相平面$(v,w)$上随着耗散系数$\delta$由零增加时，原来的鞍点到鞍点的同宿轨道先演变成鞍-焦异宿轨道，再演变成鞍-结异宿轨道，见图7.8。在§8我们将看到同宿到鞍-焦异宿轨道的演变对湍流有很大的意义。

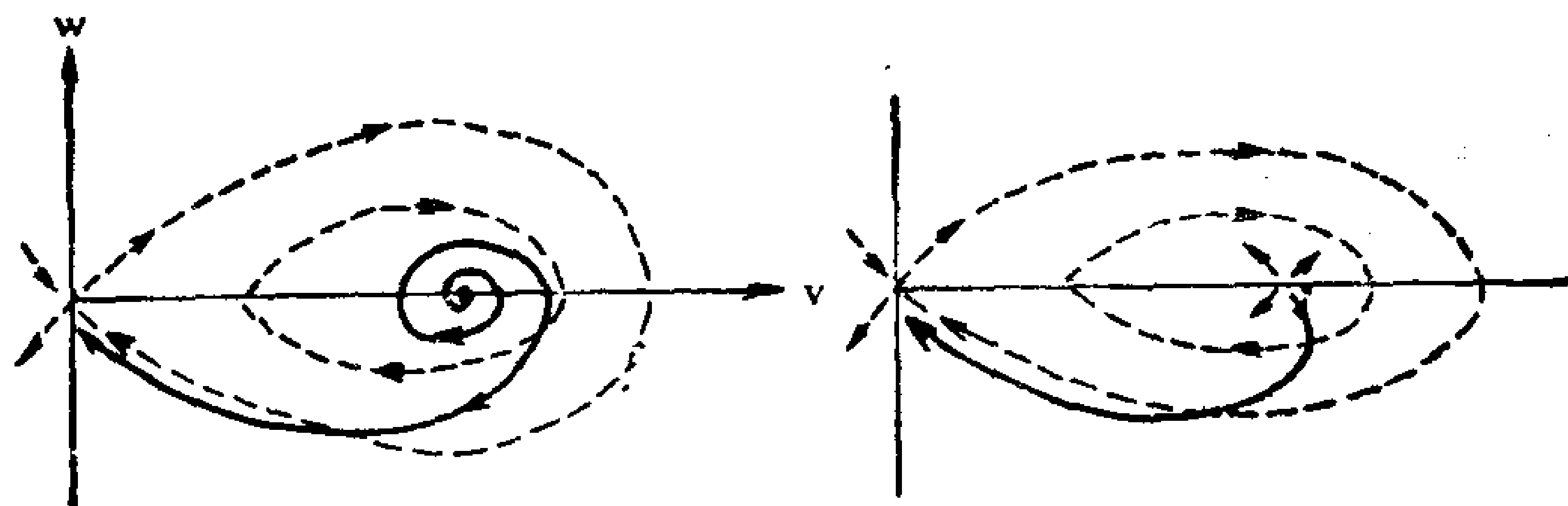



图7.8　方程（7.35）的同宿和异宿轨道

## §7　大气环流方程的同（异）宿轨道

Lorenz在1960年导出简化的大气环流运动方程组为

$$\begin{cases}\dot{x}=-Ayz\\ \dot{y}=Bxz\\ \dot{z}=-Cxy\end{cases}\tag{7.42}$$

其中$x$代表纬向气流，$y$，$z$代表迭加在纬向气流上的扰动。

（7.42）是能量守恒系统，即

$$x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)=\text{const}=\rho^2\tag{7.43}$$

因此在相空间（$x,y,z$）的球面上，（7.42）有四个中心点：

1点：$(\rho,0,0)$　　2点：$(-\rho,0,0)$

5点：$(0,0,\rho)$　　6点：$(0,0,-\rho)$

和两个鞍点：

3点：$(0,\rho,0)$　　4点：$(0,-\rho,0)$

见图7.9。

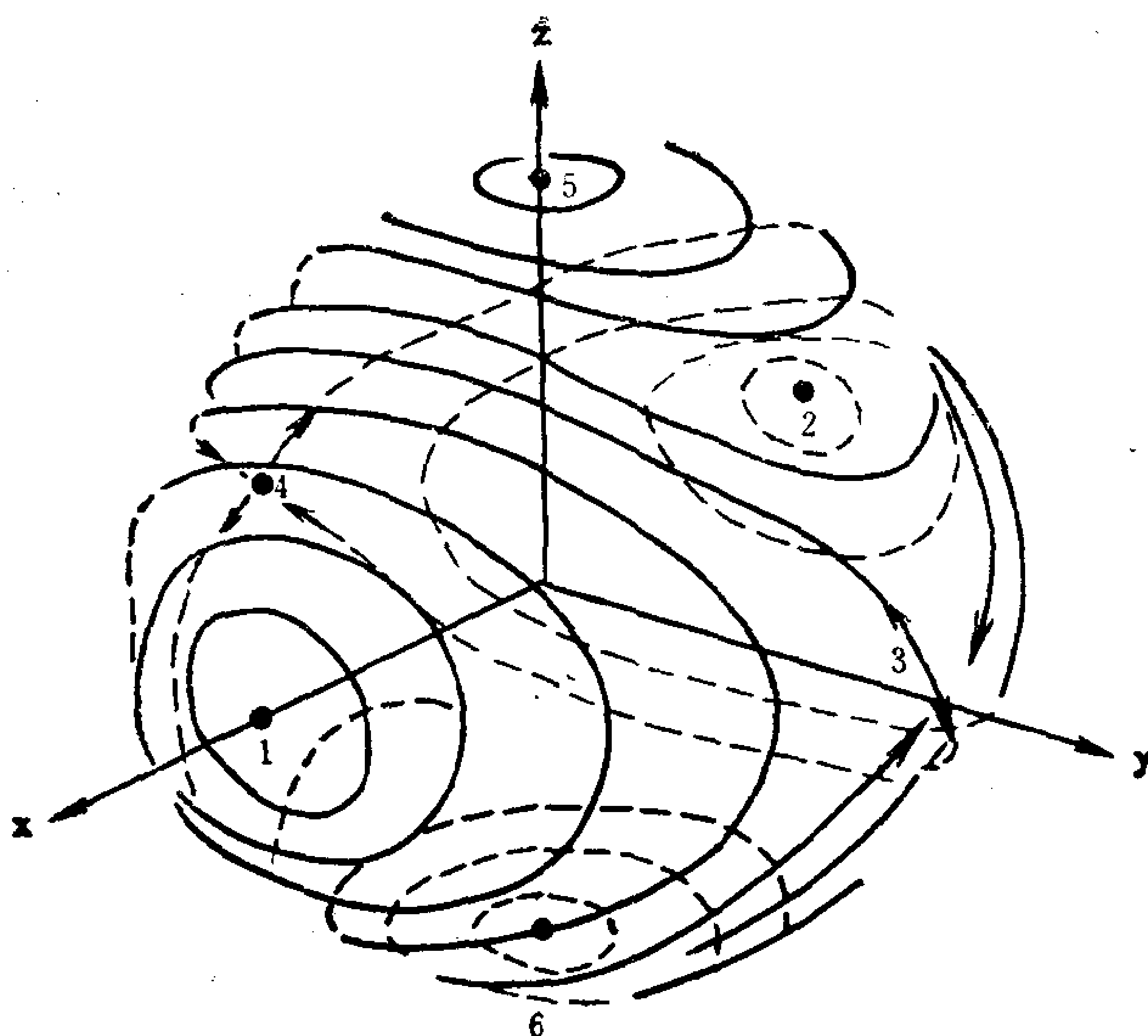



图7.9 方程（7.42）在相空间球面上的四条异宿轨道

那么这两个鞍点之间就在相空间形成四条异宿轨道。例如由4点到3点在$z$轴下方向上的一条异宿轨道，其$x,y,z$随$t$的变化图见图7.10。

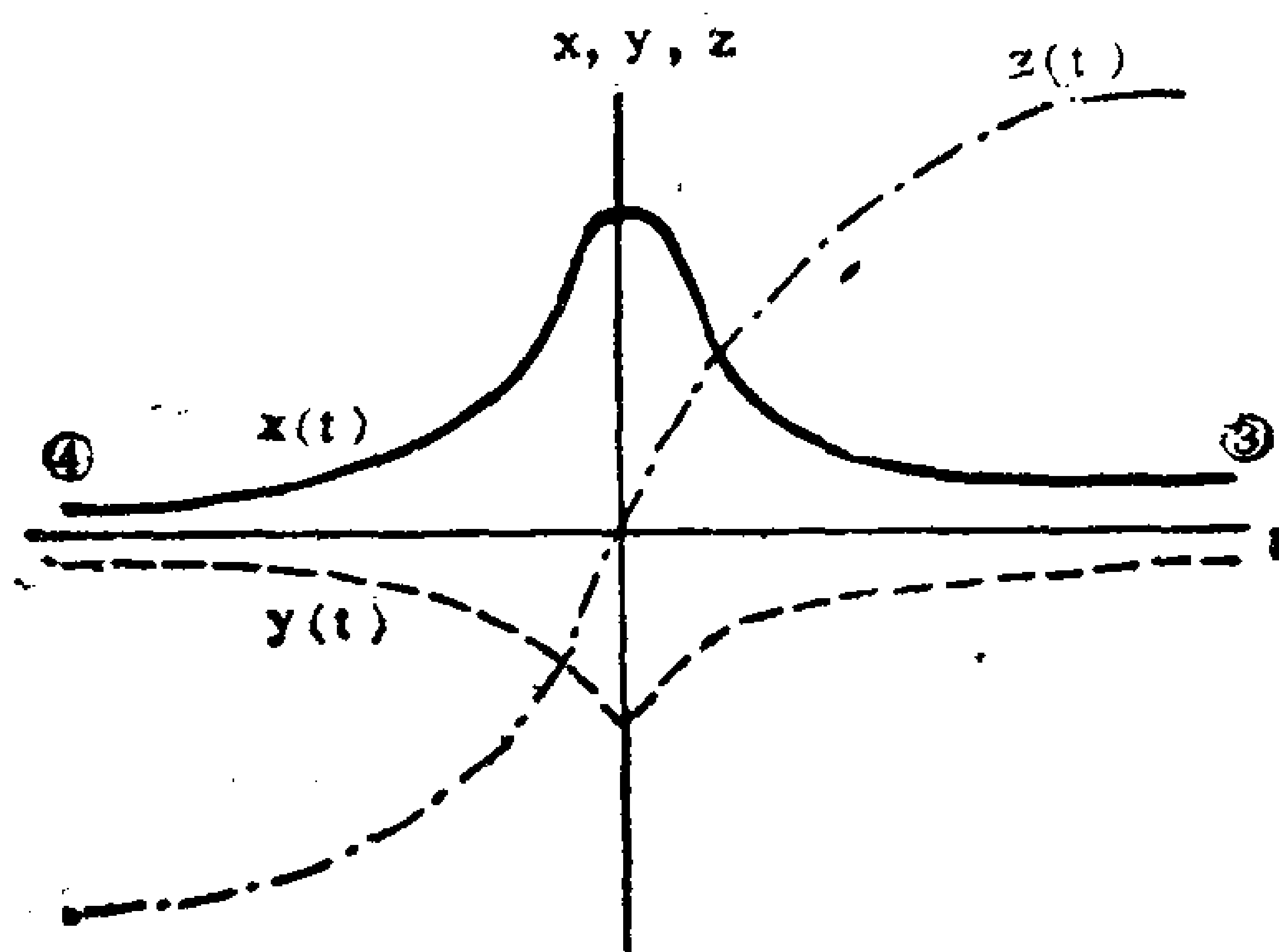



图7.10 一条异宿轨道$x,y,z$随$t$的变化

从图7.10看出，$x(t)$和$z(t)$就是孤立波，$y(t)$是冲击波。但是三个分量合并起来还是一个冲击波形式，它在$t\to\infty$时趋向于第3点，在$t\to-\infty$时趋向于第4点。而相图7.9中的闭合轨道是用椭圆函数表示的，当椭圆函数的模数趋向1时，它们就趋向于同宿（或异宿）轨道：即例如

$$
\begin{aligned}
&x(t): cn\to \text{sech}\\
&y(t): sn\to \tanh\\
&z(t): dn\to \text{sech}
\end{aligned}
\tag{7.44}
$$

## §8 三阶系统中的同宿轨道

三阶或三阶以上系统中同(异)宿轨道更是丰富多彩。我们已经看到大气环流模型中同（异）宿轨道，那是保守系统的，现在举两个耗散系统中的例子。

例1：轨道同宿到鞍点

这里的典范方程组为

$$
\begin{cases}
\dot{x} = \lambda_1 x + f_1(x,y,z,\mu)\\
\dot{y} = \lambda_2 y + f_2(x,y,z,\mu)\\
\dot{z} = \lambda_3 z + f_3(x,y,z,\mu)
\end{cases}
\tag{7.45}
$$

其中 $\lambda_1<0,\lambda_2<0,\lambda_3>0,f_1,f_2,f_3$是非线性函数，$\mu$是参数。

显然原点$(0,0,0)$是一双曲点，其两个轨线方向趋向它，一个轨线方向离开它，在参数$\mu=0$时形成三维同宿轨道，见图7.11。

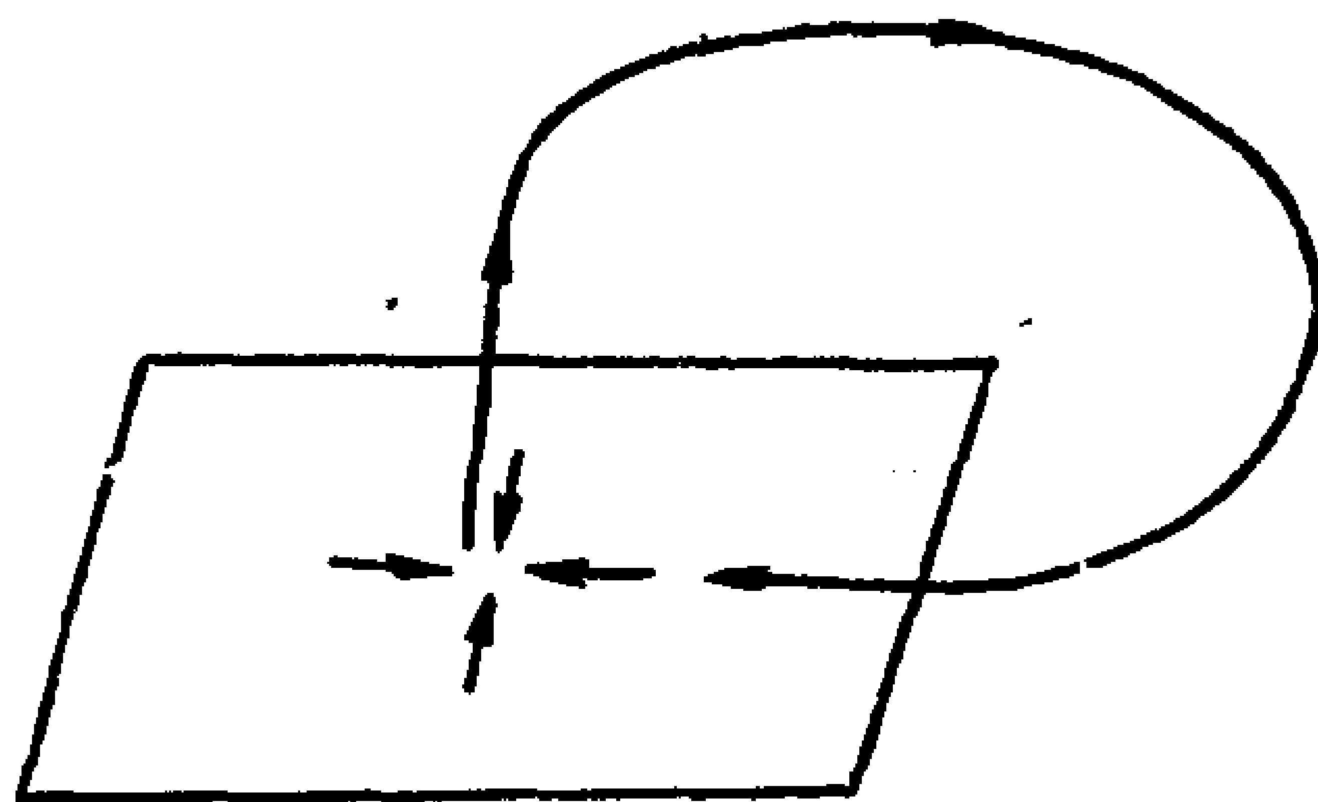


图7.11 同宿到鞍点的三维同宿轨道

例2：轨道同宿到鞍-焦点

其典范方程为

$$\begin{cases}\dot{x}=\rho x-\omega y+P(x,y,z,\mu)\\ \dot{y}=\omega x+\rho y+Q(x,y,z,\mu)\\ \dot{z}=\lambda z+R(x,y,z,\mu)\end{cases} \tag{7.46}$$

其中$\lambda>0,\rho<0$

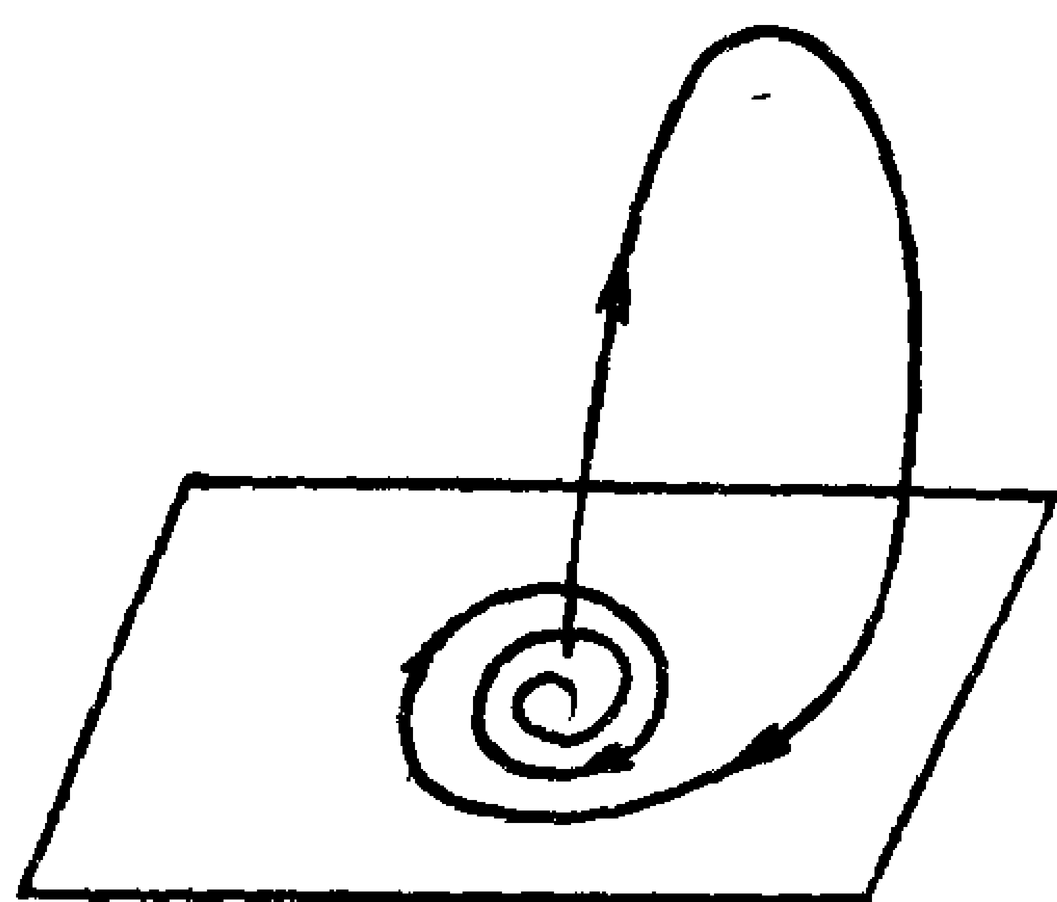


图7.12　同宿到鞍-焦点的 Silnikov同宿轨道

显然原点（0,0,0）在$(x,y)$平面上轨道是螺旋到原点的，而在$z$方向是离开原点的，这就形成一个名叫Silnikov类型同宿轨道，见图7.12。很易说明只要平衡点是双曲的，且形成一同宿（或异宿）闭轨，那么任何扰动就很易形成伸长或折迭的同宿轨道或异宿轨道的稳定流形和不稳定流形横截相交，形成无数个同（异）宿点，形成马蹄，这就是出现浑沌运动的重要条件，见图7.13。



图7.13　同（异）宿轨道闭轨形成的稳定流形和不稳定流形横截相交

## §9　湍流的KdV-Burgers方程模型

由于KdV-Burgers方程中含有湍流产生的主要因子：非线性、色散和耗散，使得其可以考虑它作为湍流的最简单模型。由§3还看出，随着系统中粘性系数$\nu$从0逐渐增加，行波解的动力系统的轨道，由闭轨的同宿轨道逐步演变成鞍-结异宿轨道，再演

变成鞍-焦异宿轨道。

我们再看看图7.3的鞍-焦异宿轨道，当它以速度 $c$ 向右移动时，该冲击波的前方场首先被状态$u_2$控制，慢慢地进入耗散项几乎不起作用的孤立波一段，并使波的振幅（或能量）达到最大，这就为湍流的串级过程积累了能量。然后行波就进入耗散所引起的衰减振荡所控制，波的振幅和尺度逐渐衰减，这就是湍流的涡旋尺度的串级散裂过程，最后被状态$u_1$所控制。

非线性的作用能使能量集中，它和色散作平衡时可形成孤立波（或同宿轨道），这为出现湍流提供必要的条件，这种规则的波动结构又伴随着随机的湍流出现。正色散的作用加上耗散因子，可使涡旋尺度由大变小，最后使湍流具有间歇性，耗散能量集中在空间非常少的地点，形成奇异性。

现在我们来考虑湍流速度场。我们把图7.3左半部分围绕$u_1$的扰动部分记为$u'$，由(7.23)式知

$$u'(\xi)=ae^{\frac{\nu}{2\beta}\xi}\ \cos k_1\xi,(-\infty,0) \tag{7.47}$$

其中 $a=\frac{u_1-u_2}{2}=\sqrt{c^2+2A}$

$$k_1=\sqrt{k_0^2-\left(\frac{\nu}{2\beta}\right)^2}$$

$$k_0^2=\frac{u_1-u_2}{2\beta}=\frac{\sqrt{c^2+2A}}{2\beta} \tag{7.48}$$

图7.3左半部分振荡曲线与直线$u=u_1$的交点$\xi_n(n=1,2\cdots)$满足

$$\cos k_1\xi_n=\cos\sqrt{k_0^2-\left(\frac{\nu}{2\beta}\right)^2}\ \xi_n=0\quad(n=1,2\cdots) \tag{7.49}$$

因为$\xi_n<0$,因而求得

$$\xi_n=\frac{-\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{k_1}=\frac{-2\beta\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{\sqrt{2\beta(u_1-u_2)-\nu^2}},(n=1,2\cdots) \tag{7.50}$$

(7.50)

设鞍-焦异宿轨道在两个零点 $(\xi_n,\xi_{n+1})$之间所围的面积为$S_n$，则由（7.47）式求得

$$S_n=\left|\int_{\xi_{n+1}}^{\xi_n} ae^{\frac{v}{2\beta}\xi}\cos k_1\xi d\xi\right|$$

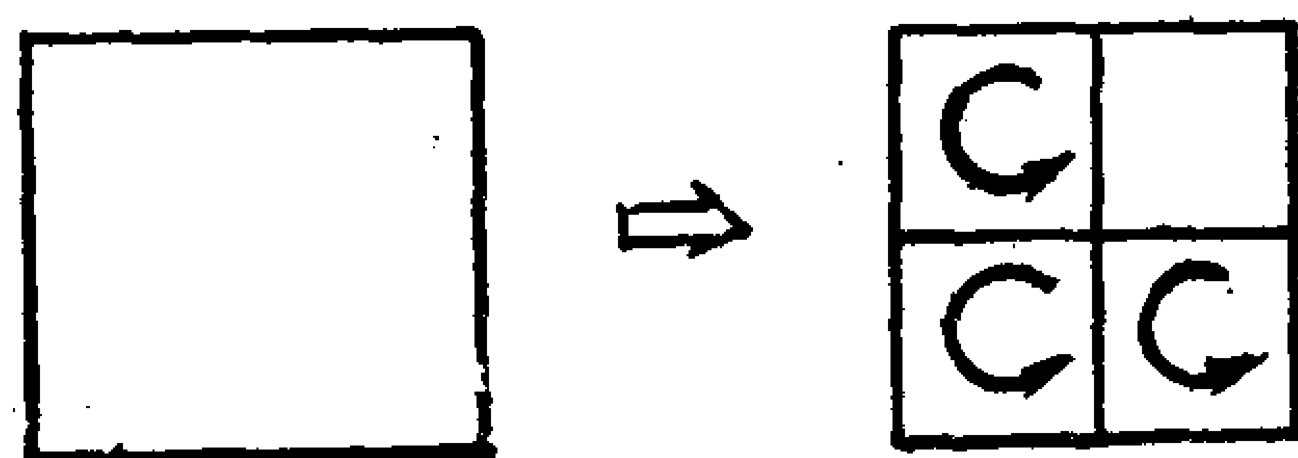
$$=\frac{2ak_1\cosh\dfrac{v\pi}{4\beta k_1}}{\left(\dfrac{v}{2\beta}\right)^2+k_1^2}\left(e^{-\frac{v\pi}{2\beta k_1}}\right)^n\ ,(n=1,2\cdots)$$

(7.51)

由此可知，$S_n(n=1,2\cdots)$ 按等比级数递减，其公比为

$$q=e^{-\frac{v\pi}{2\beta k_1}} \tag{7.52}$$

这就说明湍流串级散裂过程是按等比数列进行的。这正是湍流自相似的分维结构的基础，图7.10是一个方涡旋每次串级散裂成三个小涡旋的过程，最初面积占原面积的$\frac{3}{4}$，后来占$\left(\frac{3}{4}\right)^2$，…即以$\frac{3}{4}$为公比递减的，这里的3/4就相当于（7.52）式的公比$q$。



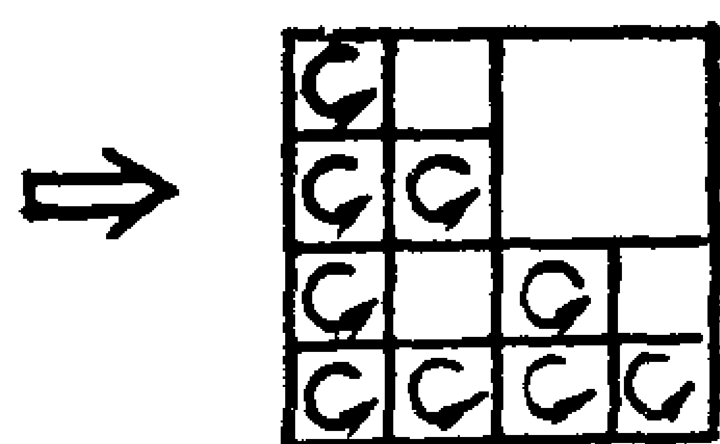


图7.14 以公比$\frac{3}{4}$串级散裂的过程

对图7.14的串级过程，面积$S_n$和$r_n$的关系可设为

$$S_n=r_n^a \tag{7.53}$$

或

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{na} \tag{7.54}$$

取对数求得

$$\alpha = 2 - \frac{\log 3}{\log 2} = 2 - D \tag{7.55}$$

其中$D = \frac{\log 3}{\log 2}$就是按分数维的定义(2.9)式来定义的。因为湍流是三维空间的现象，这里只是用二维比拟而已。

从（7.52）看出，湍流串级过程或湍流间歇性质，主要决定于耗散系数$\nu$和色散系数$\beta$的比值。$\frac{\nu}{\beta}$愈大，串级散裂过程愈快，相邻两级涡旋所占面积差别愈大，湍流的间歇性愈大。因此看出，鞍-焦异宿轨道和湍流的出现是严密相关的。

## §10 关于湍流能谱的若干问题

关于湍流能谱最著名的是Kolmogorov能谱的$-5/3$方定律，它比较符合用实际资料计算的结果。我们现在用$K_dV$-Burgers模式来探讨这个问题。

把（7.47）式看作是湍流的速度场。它是$\xi$的函数，点$\xi$移动$\eta$后的速度场为

$$u'(\xi+\eta) = ae^{\frac{\nu}{2\beta}(\xi+\eta)}\cos k_1(\xi+\eta) \tag{7.56}$$

那么$u'(\xi)$和$u'(\xi+\eta)$的相关函数和相关系数分别为

$$f(\eta) = \overline{u'(\xi)u'(\xi+\eta)} \tag{7.57}$$

$$R(\eta) = \frac{\overline{u'(\xi)u'(\xi+\eta)}}{\overline{u'^2(\xi)}} \tag{7.58}$$

我们说平均的空间长度尺度为L，那么（7.57），（7.58）式中平均的定义为

$$\overline{(\quad)} = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{\infty}(\quad)\,d\xi \tag{7.59}$$

将（7.47）和（7.56）代入（7.58）求得

$$R(\eta)=e^{\frac{\nu}{2\beta}\eta}\left[\cos k_1\eta+\frac{k_1\frac{\nu}{\beta}}{\left(\frac{\nu}{2\beta}\right)^2+2k_1^2}\sin\eta\right] \qquad (7.60)$$

显然它满足$R(0)=1, R(-\infty)=0$。

这里应指出，（7.60）式的相关函数和一般假设的纯指数衰减形式不同。

由（7.60）式求得积分尺度

$$L=\int_{-\infty}^{0}R(\eta)d\eta$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{\beta}\right)^3}{\left[\left(\frac{\nu}{2\beta}\right)^2+k_1^2\right]\left[\left(\frac{\nu}{2\beta}\right)^2+2k_1^2\right]} \qquad (7.61)$$

按照平均的定义（7.59）式，将（7.61）使用的$L$代入（7.59），求得相关函数为

$$f(\eta)=\frac{a^2}{L}\cdot\frac{e^{\frac{\nu}{2\beta}\eta}}{\left(\frac{\nu}{2\beta}\right)^2+(2k_1)^2}\left[\left(\frac{\nu}{\beta}+2k_1^2\frac{\beta}{\nu}\right)\cos k_1\eta\right.$$

$$\left.+k_1\sin k_1\eta\right] \qquad (7.62)$$

由于自相关函数$f(\eta)$和能谱$F(k)$互为傅里叶变换，即

$$F(k)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{0}f(\eta)\cos k\eta d\eta$$

$$f(\eta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{0}F(k)\cos k\eta dk \qquad (7.63)$$

将（7.62）代入（7.63）得到

$$F(k)=\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}a^2}{2Lk_0^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{k}{k_0}\right)^2}\cdot\frac{1-\frac{(k_1/k_0)^2}{1+(k/k_0)^2}}{1-\left[\frac{2k_1/k_0\cdot k/k_0}{1+(k/k_0)^2}\right]} \qquad (7.64)$$

我们取定$\frac{\nu}{2\beta}/k_0 = 0.6$，0.8，0.98，作出在双对数坐标$\left(\log\frac{k}{k_0},\ \log F_1(k)\right)$上的能谱图象见图7.15。图7.15非常相似于Kolmogorov的能谱及实际计算的能谱。图7.15中能谱最高点处是相应于含能涡区，斜率接近于直线的区域是惯性区。

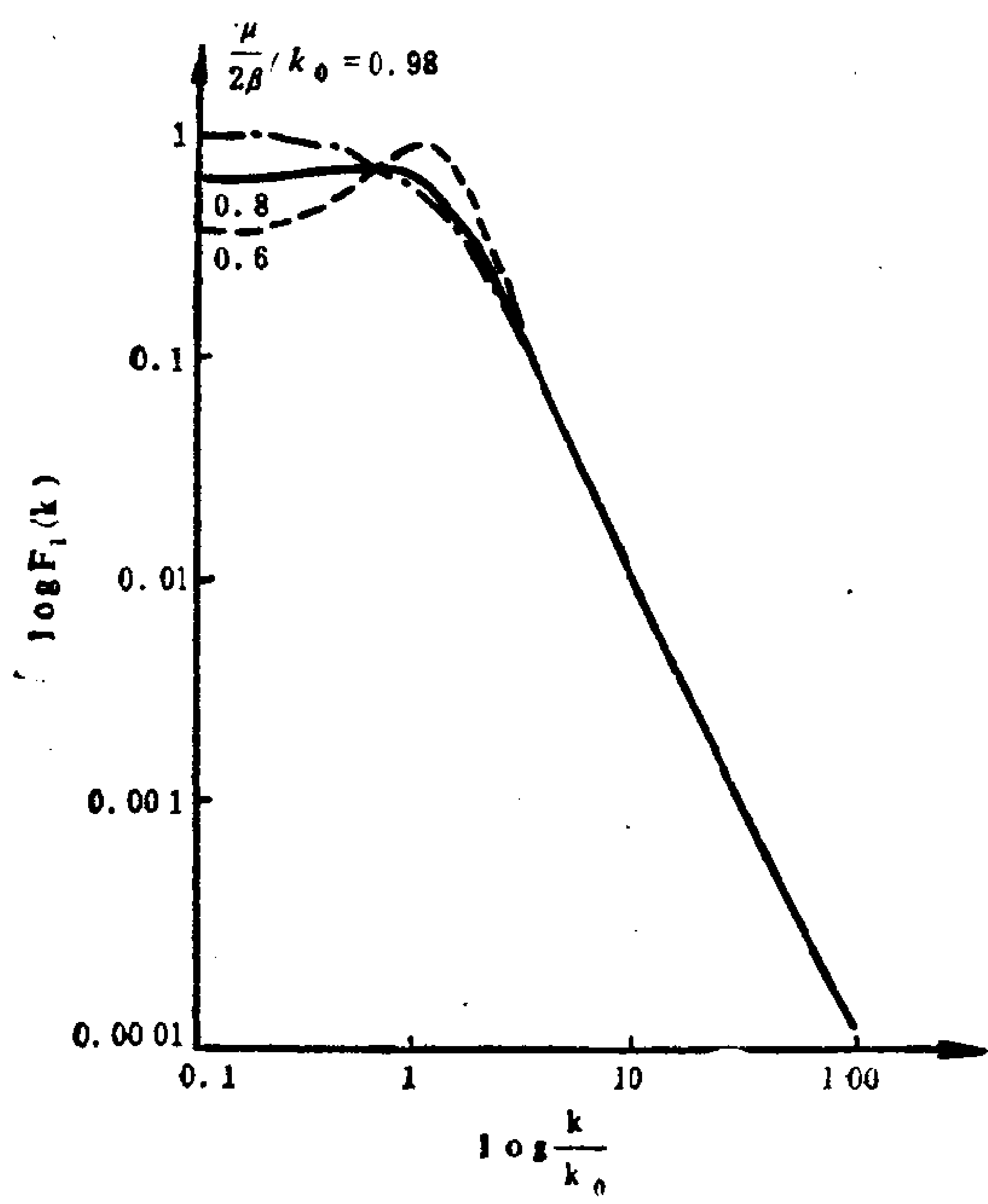



图7.15　在双对数坐标$\left(\log\frac{k}{k_0},\ \log F_1(k)\right)$中的能谱图象

从图7.15粗略估算出

$$
\begin{cases}
\text{斜率}\quad \dfrac{\log F_1(k)}{\log k/k_0} = -1.76, \text{当} 1 < \dfrac{k}{k_0} < 3 \\
\text{斜率}\quad \dfrac{\log F_1(k)}{\log k/k_0} = -1.97, \text{当} 3 < \dfrac{k}{k_0} < 10
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} 斜率 \quad \dfrac{\log F_1(k)}{\log k/k_0} = -1.94, \quad 当10<\dfrac{k}{k_0}<30 \\ 斜率 \quad \dfrac{\log F_1(k)}{\log k/k_0} = -1.88, \quad 当30<\dfrac{k}{k_0}<80 \end{cases} \tag{7.65}$$

假如用Frisch的间歇湍流模型

$$F(k) = k^{-\frac{5}{3}-\frac{3-D}{3}} \tag{7.66}$$

来量度，分数维$D$的数值估算为

$$\begin{cases} D = 2.72 \quad 当1<\dfrac{k}{k_0}<3 \\ D = 2.09 \quad 当3<\dfrac{k}{k_0}<10 \\ D = 2.19 \quad 当10<\dfrac{k}{k_0}<30 \\ D = 2.35 \quad 当30<\dfrac{k}{k_0}<80 \end{cases} \tag{7.67}$$

这再一次说明湍流的间歇性。

关于能谱问题有下面几个问题有待进一步讨论：

1. 究竟“-5/3”方律是实际间歇湍流的结果？还是均匀各向同性湍流的结果？

2. 湍流是一种浑沌机理？还是第六章介绍的Soc（自组织临界现象）或弱浑沌机理？还是本章介绍的色散加耗散机理？

3. 从形式上看，自相关函数若是指数函数（6.51）式，那么只会出现褐色噪声“-2次方”能谱定律。若自相关函数是幂函数形式，例如$x^{\frac{2}{a}}$，则它的傅里叶变换的能谱就是“$-\left(1+\dfrac{2}{a}\right)$”定律，只要$a$介于2和3之间，也会出现“-5/3次方到-2次方”定律。本文的自相关函数是指数衰减加上振荡形式也能导出湍流能谱。究竟用什么样的相关函数最好？

# 第八章　湍流的多分维过程

在第一、四、六、七各章中，我们从不同角度谈到了湍流问题。可见湍流问题是极其重要的。为了把湍流问题理解得深透，本章较为系统地加以论述。

## §1 Kolmogorov理论及其问题

1941年苏联著名科学家 Kolmogorov 提出，在高雷诺数条件下，大涡旋串级到小涡旋的过程要经历许许多多级，以致到惯性区非各向同性的大尺度的影响可以忽略，而认为小尺度涡旋是局地均匀各向同性的，此时湍流的统计特征与粘性已无关，而主要决定于平均能量通量 $\overline{\varepsilon}$。

图8.1是Kolmogorov 能量串级格式

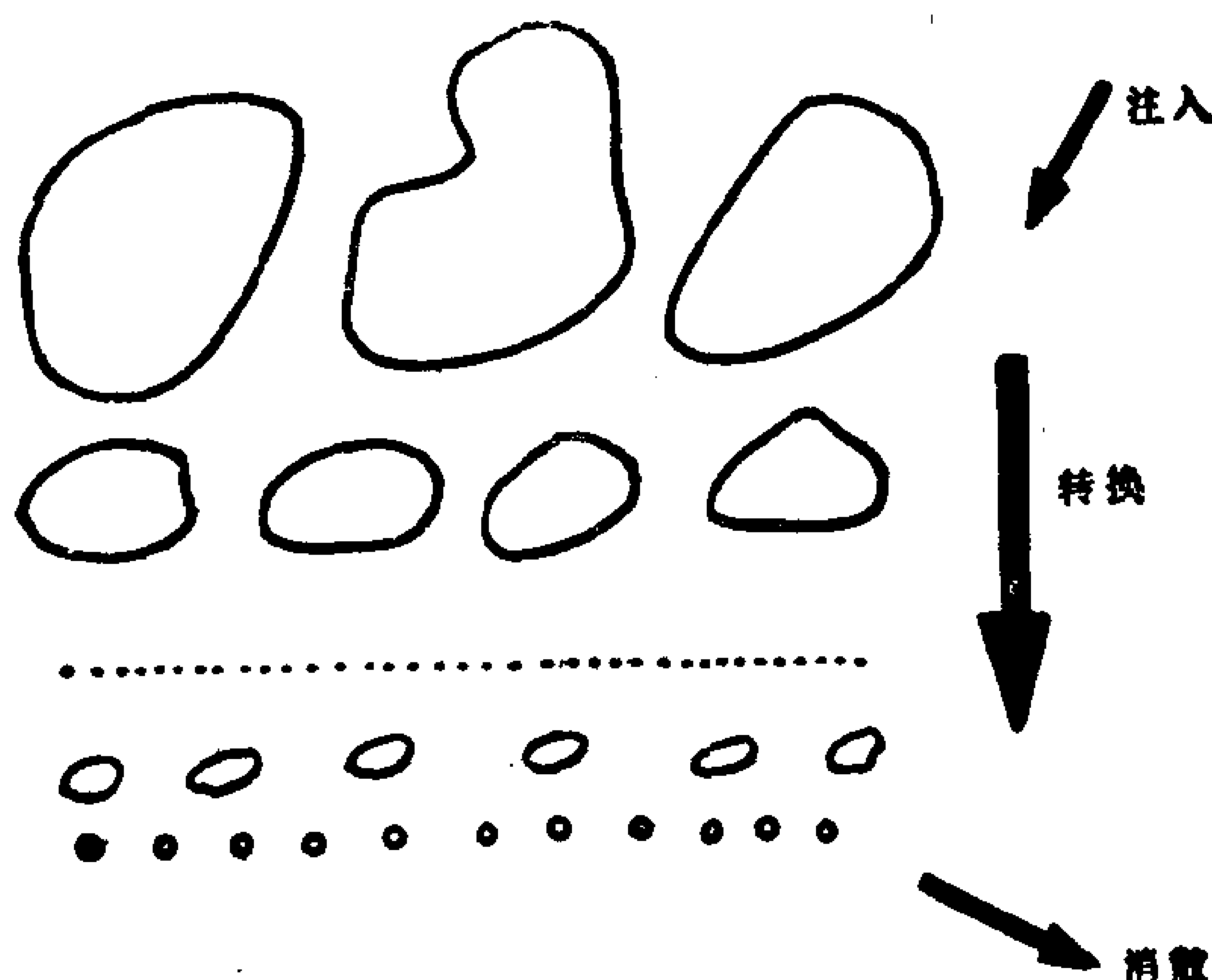



图8.1　Kolmogorov大涡变小涡的串级格式

它用量纲分析法导得两条定律。

（1）结构函数的$\frac{2}{3}$方定律，即

$$\overline{(\Delta v)^2}=(\overline{\varepsilon}\,r)^{2\alpha} \tag{8.1}$$

其中 $$\Delta v=u(x+r)-u(x)\sim r^{\alpha},\quad \alpha=\frac{1}{3} \tag{8.2}$$

$\alpha$称为速度差的标度指数

（2）能谱的$-5/3$方定律，即

$$S(k)\sim\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \tag{8.3}$$

我们已经在第二章（2.38）式论证了功率谱$S(k)\sim k^{-\beta}$中的指数

$$\beta=2\alpha+1=\frac{5}{3} \tag{8.4}$$

因此定律（1）和（2）是完全相配合的。

我们已经在第四章中论述湍流能量耗散率$\overline{\varepsilon}$有

$$\overline{\varepsilon}\sim r^{3\alpha-1} \tag{8.5}$$

因此$\overline{\varepsilon}$在串级过程中保持不变，参看（4.13）式。

但是试验证明$\varepsilon(r)$有强烈的奇异性，即它只集中在空间很小的区域中，图8.2是用Navier-Stokes方程模拟的能量耗散数$\varepsilon(r)$的分布，95%的能量耗散集中在图8.2的黑色区域。这充分说明小尺度湍流涡旋并不充满空间的，即湍流是间歇和奇异性的。也就是说小尺度湍流的统计特征不但依赖于$\overline{\varepsilon}$，而且也依赖于$\varepsilon(r)$。

由于湍流的间歇性和奇异性，一般$q$阶矩的结构函数

$$\overline{(\Delta v(r))^q} \tag{8.6}$$

就不能象二阶结构函数（8.1）式那样是$q$的线性函数（且比例系数就是$\alpha=\frac{1}{3}$）。这是用单标度不能解决的问题，而必须采取多重分维模式。

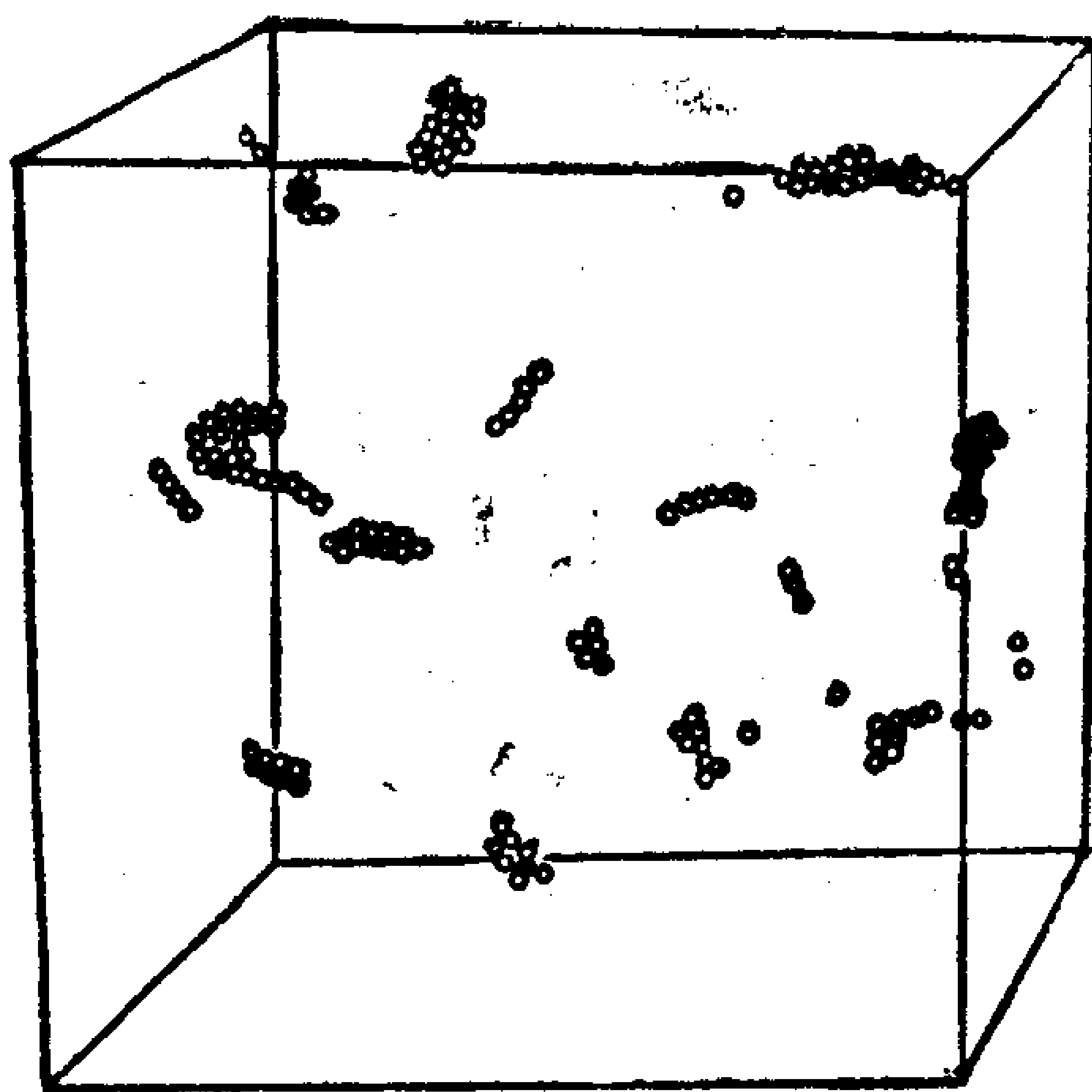


图8.2　$\varepsilon$的数值模拟结果

## §2　多分维$D_q$和间歇性指数

按照多分维的定义，（4.19）式和（4.43）式有

$$\sum_{i=1}^{N} P_i^q \sim r^{(q-1)D_q} \tag{8.7}$$

其中$P_i$是第$i$个盒子内每单位质量的耗散占全部耗散的概率，一般$P_i$有

$$P_i \sim \varepsilon_r \cdot r^d \tag{8.8}$$

另外$N$是盒子总数，它有

$$N \sim r^{-d} \tag{8.9}$$

（8.8）式和（8.9）式中$d$是空间维数。

另外$q$阶间歇性指数$\mu_q$是定义为

$$\overline{\varepsilon_r^q} \sim r^{-\mu_q} \tag{8.10}$$

利用（8.8）、（8.9）、（8.10）式，（8.7）式的左边应有

$$\sum P_i^q \sim r^{-\mu_q} r^{d(q-1)} \tag{8.11}$$

比较（8.7）和（8.11）就得到多分维$D_q$和间歇性指数$\mu_q$有如下

关系：

$$-\mu_q=(q-1)(D_q-d) \tag{8.12}$$

下面我们来看$q$阶矩的结构函数（8.6）式和间歇性指数$\mu_q$的关系。

由于

$$\varepsilon_r=\frac{(\Delta v)^3}{r}\sim r^{3\alpha-1} \tag{8.13}$$

所以

$$\overline{(\Delta v)^q}=\overline{\varepsilon_r^{q/3}}r^{q/3} \tag{8.14}$$

将（8.10）代入上式得

$$\overline{(\Delta v)^q}\sim r^{-\mu_{q/3}+\frac{q}{3}} \tag{8.15}$$

显然对应Kolmogorov均匀（无间歇）各向同性湍流模型

$$D_q=d=3 \tag{8.16}$$

因而由（8.12）式间歇性指数$\mu_q=0$，因而由（8.15）式就成为

$$\overline{(\Delta v)^q}\sim r^{q/3} \tag{8.17}$$

（8.17）式说明在均匀各向同性湍流的情况下，$q$阶矩结构函数的标度指数是与$q$成正比的，比例系数就是速度差的标度指数（8.2）中的$\alpha=\frac{1}{3}$。

## §3 标度律和$f(\alpha)$谱

我们已经在第四章（4.9）到（4.13）式说明流体力学的Navier-Stokes方程存在标度律。

按照（4.23）式，我们假设相同的标度指数$\alpha$在一个分数维$f(\alpha)$，则

$$\sum_i^N p_i^q\sim r^{-d}\int\rho(\alpha)(\varepsilon_r r^d)^q r^{d-f(\alpha)}\mathrm{d}\alpha$$

$$\sim r^{(q-1)D_q} \tag{8.18}$$

其中$r^{d-f(\alpha)}$是同样$\alpha$所占空间的比例。

由此导得

$$f(\alpha)=3\alpha q-(q-1)(D_q-d+1)+d-1 \qquad (8.19)$$

$$3\alpha=\frac{d}{dq}\left[\left(q-1\right)\left(D_q-d+1\right)\right] \qquad (8.20)$$

很易证明（4.30）中的$\alpha$若表示为$\alpha_s$，它和$\alpha$的关系为

$$\alpha_s=3\alpha-1+d \qquad (8.21)$$

下面我们分别介绍目前比较流行的几种间歇性机理的理论：

（1）Kolmogorov和Obukhov的$\varepsilon_r$的对数正态分布模式；

（2）Frisch的$\beta$模式；

（3）对$\varepsilon_r$的“二种尺度的Cantor集合”近似。

## §4　对数正态分布模式

Kolmogorov和Obnkhov认为，能量耗散率偏离平均值$\overline{\varepsilon}$的局部涨落$\varepsilon_r=\varepsilon-\overline{\varepsilon}$可以用对数正态分布

$$P(\varepsilon_r)=\frac{1}{\overline{\varepsilon}\,\sigma r\sqrt{2\pi}}e^{\left\{\sigma_r^2-\frac{\left[\ln\left(\frac{\varepsilon_r}{\overline{\varepsilon}}\right)+3\sigma_r^2/2\right]^2}{2\sigma_r^2}\right\}} \qquad (8.22)$$

其中方差$\sigma_r$为

$$\sigma_r^2=\mu\ln(L/r) \qquad (8.23)$$

其中$L$是湍流的外尺度

由（8.22）式就可以确定$\varepsilon_r$的$q$阶矩

$$\overline{\varepsilon_r^q}=\int_0^\infty P(\varepsilon_r)\varepsilon_r^q d\varepsilon_r=\overline{\varepsilon}^q\left(\frac{L}{r}\right)^{\frac{\mu q(q-1)}{2}} \qquad (8.24)$$

将（8.24）与（8.10）式比较可以看出，此时间歇性指数$\mu_q$为

$$\mu_q=+\frac{\mu}{2}q\left(q-1\right) \qquad (8.25)$$

再将（8.25）与（8.12）式比较可看出

$$D_q = d - \frac{\mu}{2}q \tag{8.26}$$

因此，给定$\mu$值（例如$\mu = 0.25$），随着$q$的增加，$D_q$线性地减少。

图8.3中曲线1表示$D_q$随$q$的对数正态分布模式的变化

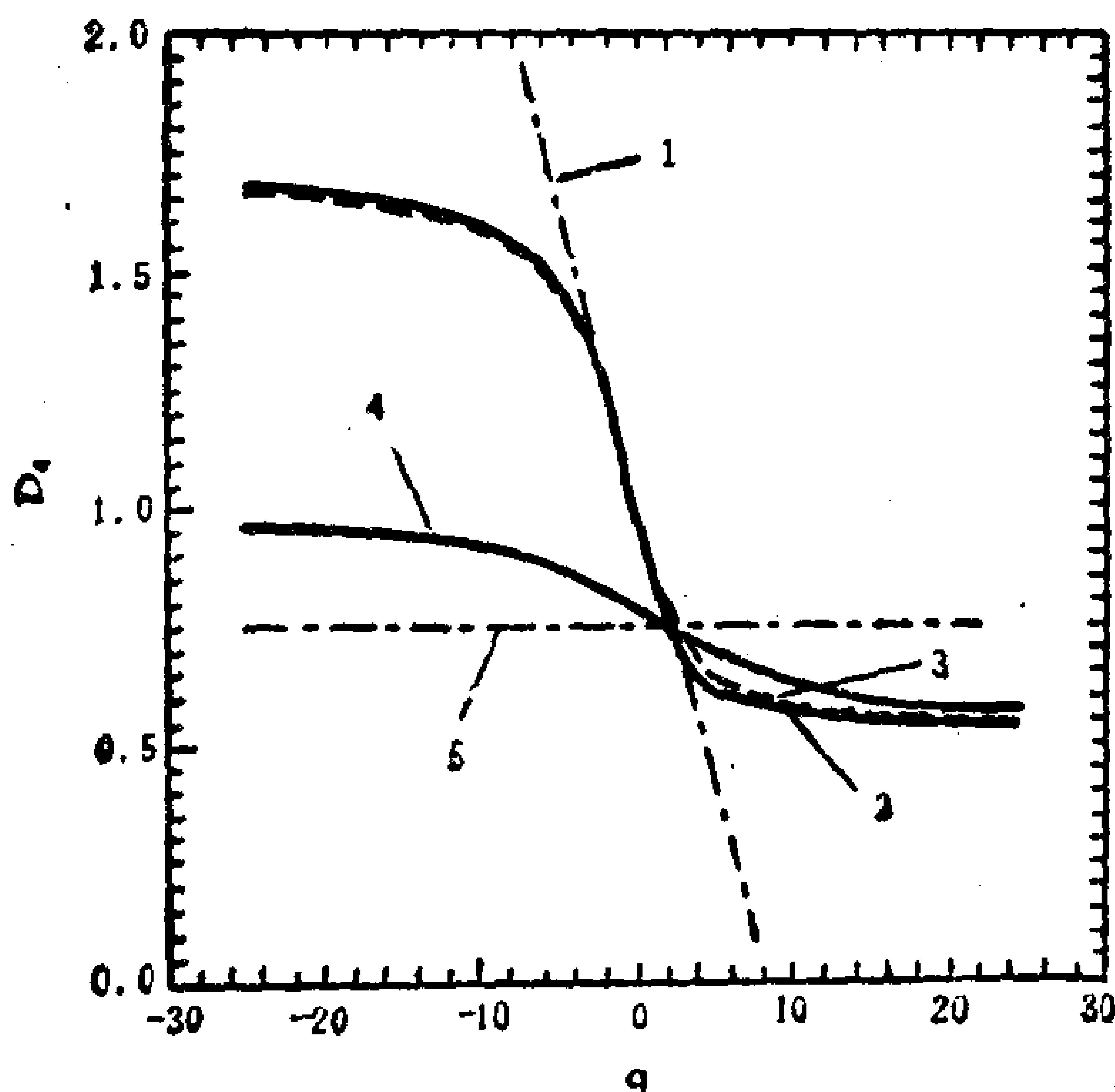



图8.3　在各种模式中$D_q$随$q$的变化

曲线1：对数正态分布（$\mu=0.25$）

曲线2：有界对数正态分布（$\alpha_1=0.5$，$\alpha_2=0.7$，$d=1$）

曲线3：两尺度Cantor集模式

曲线4：随机$\beta$模式

曲线5：均匀$\beta$模式($\mu_2=0.25$)

将（8.26）式代入（8.19）式就可以确定$f(\alpha)$随$\alpha$的变化曲线。图8.4是各种模式中$f(\alpha)$随$3\alpha$变化曲线，图中的虚线是对数正态模式（$\mu=0.2$）。

经验表明对数正态模式在$q$比较小时还可以，但到$q\geqslant3$就和实际有较大偏离。

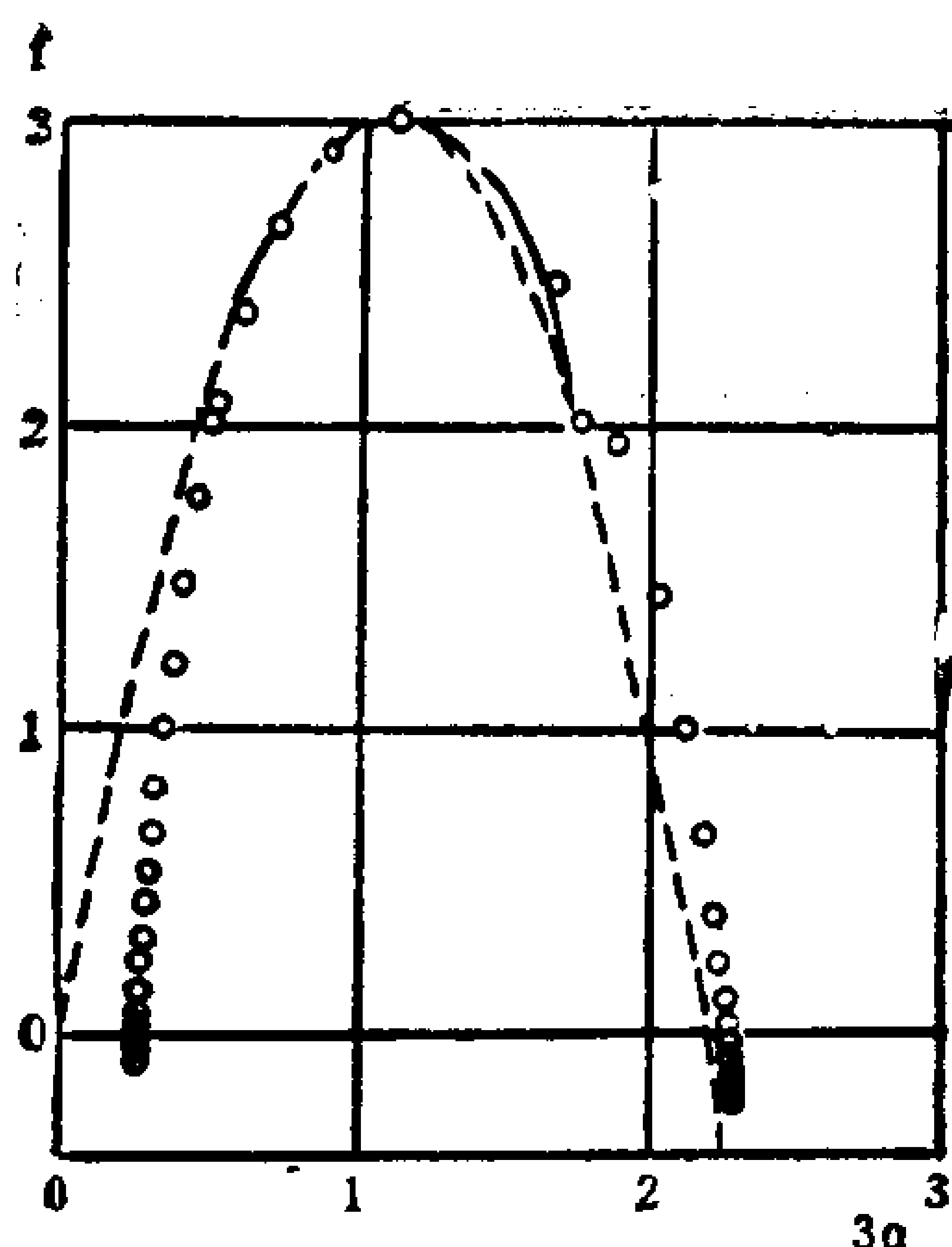



图8.4　各种模式中$f(\alpha)$曲线

虚线为对数正态模式（$\mu=0.2$）
两头标有小正方形的实线为两尺度Cantor集模式
叉号为$\beta$模式

## §5　两尺度Cantor集合模式

Kolmogorov对数正态模式的基本问题是（8.24）式中尺度是无界的。但实际上惯性区尺度的两边都是有界的，即积分(8.24)式的上下限应分别为$\varepsilon_{max,r}$和$\varepsilon_{min,r}$。

一般可以假设

$$\varepsilon_{max,r} \sim \overline{\varepsilon} \cdot r^{-\alpha_1} \qquad (8.27)$$

$$\varepsilon_{min,r} \sim \overline{\varepsilon} \cdot r^{\alpha_2} \qquad (8.28)$$

其中$\alpha_1$，$\alpha_2>0$。

因为$\alpha_1$和$\alpha_2$是两个边缘的标度指数，按（4.34）和（4.36）式，它们应分别对应于$D_{+\infty}$和$D_{-\infty}$。

由（8.10）和（8.12）式知，$\overline{\varepsilon_r^q}$的标度指数就是$\mu_q$。因此将（8.27），（8.28）和（8.12）对照就得到

$$\alpha_1 = d - D_{+\infty} \qquad (8.29)$$

$$\alpha_2 = D_{-\infty} - d \tag{8.30}$$

因此我们给定$\alpha_1=0.5$，$\alpha_2=0.7$，再给定$d$，即由（8.29)式和（8.30）式确定$D_{+\infty}$，$D_{-\infty}$，然后和对数正态分布时$D_q$直线上的$D_2$和$D_{-2}$相连接，就划成有界对数正态分布的$D_q$曲线，见图8.3的曲线2。

Meneveau等人利用两个尺度的Cantor集合，类似于(4.49)和（4.61）式有

$$D_q = \frac{1}{1-q}\log\left[P_1^q + \left(1-P_1\right)^q\right] \tag{8.31}$$

其中$P_1=0.7$，$P_2=1-P_1=0.3$。

由（8.31）作出的$D_q$曲线见图8.3曲线3。可以看出曲线2和曲线3是相当一致的。

由（8.31）式所决定的$f(\alpha)$曲线见图8.4的实线（两头有小正方形）从图上还看出，对均匀各向同性Kolmogorov模型$3\alpha=1$，其相应的$f(\alpha)$非常接近于3，但还稍稍有点差别。

## §6 β 模 式

U.Frisch的间歇模式已经在第四章§1中有所论述，该模式的基本思想是：由于小涡旋并不充满空间，因而其能量传输率也只是一部分，即

$$\overline{\varepsilon} \sim P(r)\frac{v^3}{r} \tag{8.32}$$

其中$P(r)$是所谓“活”涡旋的概率，它为

$$P(r) \sim r^{d-D} \tag{8.33}$$

那么耗散率的$q$阶矩就为

$$\overline{\varepsilon_r^q} \sim P(r)\left(\frac{v^3}{r}\right)^q \sim \overline{\varepsilon}^q P^{1-q}(r)$$

$$\sim \overline{\varepsilon}^q\left(\frac{1}{r}\right)^{(d-D)(q-1)} \tag{8.34}$$

将（8.31）和（8.10）比较，则得

$$\mu_q=(d-D)(q-1) \tag{8.35}$$

特别对$q=2$有

$$\mu_2=d-D=3-D \tag{8.36}$$

由（8.15），（8.35）式，$q$阶矩速度的结构函数为

$$\overline{(\Delta v)^q}\sim r^{\frac{q}{3}-(3-D)\left(\frac{q}{3}-1\right)}$$

$$=r^{\left(\frac{D-2}{3}\right)q+(3-D)} \tag{8.37}$$

其中

$$\alpha=\frac{D-2}{3} \tag{8.38}$$

是$D$维$\beta$模式的速度标度指数，若$D=3$，则$\alpha=\dfrac{1}{3}$就化为均匀各向同性Kolmogorov湍流。

在(8.37)式中取$q=2$，则有

$$\overline{(\Delta v)^2}=r^{\frac{2}{3}+\frac{3-D}{3}} \tag{8.39}$$

由（8.10）得

$$\overline{\varepsilon_r^2}\sim r^{-\mu_2}=r^{D-3} \tag{8.40}$$

利用（8.13）式有

$$3\alpha-1=3\cdot\frac{D-2}{3}-1=D-3 \tag{8.41}$$

这和（8.40）式一致。

该模式中$D$不随$q$而变化，在（8.35）式中取$\mu_2=0.25$，求得的$D$在图8.3中的曲线5。这虽然不符合事实。为了改进均匀$\beta$模式，有一种随机$\beta$模式，即串级过程中每次大涡旋变小涡旋带有随机性。此时$\mu_q$可以认为是这些随机的平均，即

$$\mu_q=\log_2\overline{\beta^{(1-q)}} \tag{8.42}$$

为了便于比较，图8.5列出均匀$\beta$模式和随机$\beta$模式的区别。

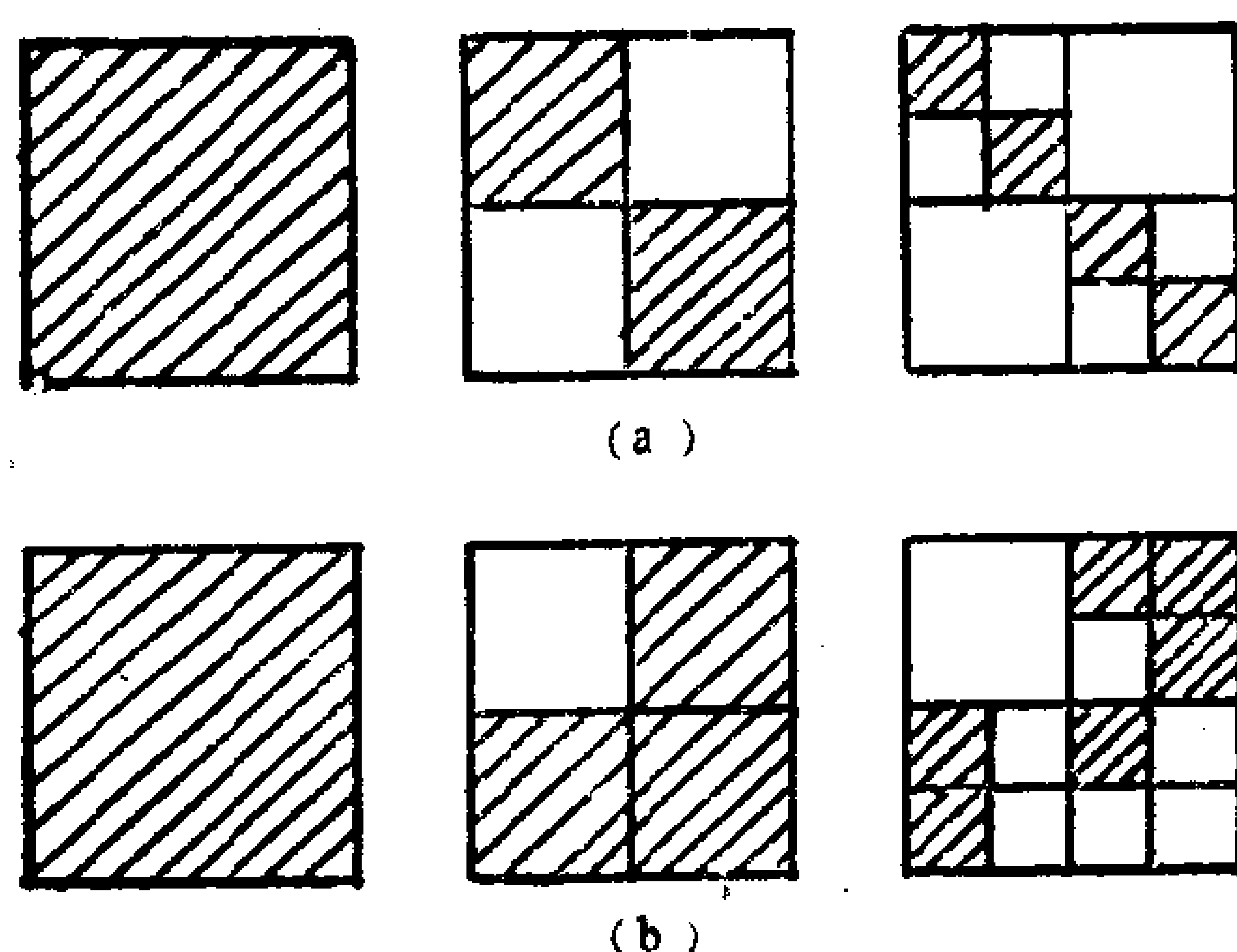



图8.5 (a) 均匀$\beta$模式
(b) 随机$\beta$模式

为了具体化，这种随机$\beta$模式可以模仿两尺度Cantor 集模式（8.31）式，取$P=0.53$，$\beta=2^{-0.5}$，则有

$$\begin{aligned}\mu_q &= (q-1)(d-D_q)\\ &= \log_2[0.53+0.47\beta^{1-q}]\\ &= \log_2[0.53+0.47\times 2^{-0.5(1-q)}]\end{aligned} \tag{8.43}$$

用（8.43）式确定的$D_q$随$q$的变化，见图8.3的曲线 4 。

在均匀$\beta$模式中，若在（8.36）式中取$\mu_2=0.2$，那么$f(\alpha)$数值就是图8.4中的一个点，用"×"号标出。

## §7 标量湍流场

前面都是研究的湍流速度场，现在研究湍流标量场的串级输送问题，特别是间歇性影响问题。

例如对标量场$\theta$（它可以是温度、湿度、浓度等），其守恒方程为

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\theta=0 \tag{8.44}$$

其中$\vec{v}$是随机的流体力学湍流速度。

和速度场的粘性耗散率（8.13）式类似，由于湍流引起的对标量场的耗散率为

$$X_r = \frac{v\theta^2}{r} \tag{8.45}$$

利用$\overline{\varepsilon}$和$v$的关系

$$v \sim \overline{\varepsilon}^{\frac{1}{3}} r^{\frac{1}{3}} \tag{8.46}$$

则（8.45）可表示为

$$\theta \sim \overline{X_r}^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{3}} / \overline{\varepsilon}^{\frac{1}{6}} \tag{8.47}$$

对标量场$\theta$的结构函数，均匀各向同性湍流 也在惯性区符合“$\frac{2}{3}$方定律”，即

$$\overline{(\Delta\theta)^2} \sim r^{2/3} \tag{8.48}$$

现在考虑标量场最简单的间歇模型——$\beta$模式。

和速度场的$\beta$模式（8.32）类似，此时$\beta$模式对（8.45）应为

$$\overline{X_r} \sim P_x(r) \frac{v\theta^2}{r} \tag{8.49}$$

其中

$$P_x(r) \sim r^{d-D_x} \tag{8.50}$$

为了便于比较，将速度场相应的式子列出为

$$\overline{\varepsilon} \sim P_\varepsilon(r) \frac{v^3}{r} \tag{8.51}$$

$$P_\varepsilon(r) \sim r^{d-D_\varepsilon} \tag{8.52}$$

由（8.44）（8.45）式看出，$x$流量非零仅当$\varepsilon$流量非零，因此概率$P_x(r)$可表示为

$$P_x(r) = P_\varepsilon(r) P_{\varepsilon/x}(r) \tag{8.53}$$

其中$P_{\varepsilon/x}$是条件概率，即$\varepsilon$分形中的点同时也属于$x$分形中的点。

比较（8.50）（8.52）和（8.53）式我们有

$$P_{\varepsilon/x}(r) \sim r^{D_\varepsilon - D_x} \tag{8.54}$$

由（8.54）式我们有

$$D_\varepsilon \geqslant D_\chi \tag{8.55}$$

（8.55）式意味着$x$的分形场应嵌入在$\varepsilon$的分形场中，或$\chi$是$\varepsilon$的子分形。从物理上讲，即$\chi$分形的空间分布奇异性比$\varepsilon$分形的奇异性强。

$X_r$的$q$阶矩为

$$\overline{X_r^q} \sim P_\chi(r)\left(\frac{v\theta^2}{r}\right)^q \sim \overline{X}^q P_\chi^{1-q}(r)$$

$$\sim \overline{X}^q r^{-(q-1)(d-D_\chi)} \tag{8.56}$$

假设$\overline{X_r^q}$的标度指数（间歇性指数）是$\mu_\chi$，则

$$\overline{X_r^q} \sim \overline{X}^q r^{-\mu_\chi} \tag{8.57}$$

则得到

$$\mu_\chi = (d - D_\chi)(q-1) \tag{8.58}$$

考虑（8.55），（8.56），（8.58），则有

$$\mu_\chi \geqslant \mu_q \tag{8.59}$$

那么相应的速度场$q$阶矩和标量场的$q$阶矩有

$$\begin{aligned}\overline{(\Delta v)^q} &\sim P_\varepsilon(r)(\Delta v)^q \\ &\sim \overline{\varepsilon}^{q/3} r^{q/3} r^{-\mu_q} \\ &\sim \overline{\varepsilon}^{q/3} r^{q/3} r^{-\left(\frac{q}{3}-1\right)(d-D_\varepsilon)}\end{aligned} \tag{8.60}$$

$$\begin{aligned}\overline{(\Delta\theta)^q} &\sim \frac{\overline{X}^{q/2}}{\overline{\varepsilon}^{q/6}} r^{q/3} r^{-\mu_\chi} \\ &\sim P_\chi(r)(\Delta\theta)^q(r) \\ &\sim \frac{\overline{X}^{q/2}}{\overline{\varepsilon}^{q/6}} r^{q/3} P_\chi^{-q/2}(r) P_\varepsilon^{q/6}(r) \\ &\sim \frac{\overline{X}^{q/2}}{\overline{\varepsilon}^{q/6}} r^{q/3} r^{-\left(\frac{q}{2}-1\right)(d-D_\chi)-q/6(d-D_\varepsilon)}\end{aligned} \tag{8.61}$$

## §8　标量湍流场的各种模式

从（8.44）和（8.53）知，由于$\varepsilon_r$的涨落和被动量(即标量)的湍流现象必然引起被动量（标量）$X_r$的涨落，故有

$$X_r = A_r^{\tau_A}\varepsilon_r^{\tau_\varepsilon} \qquad (8.62)$$

其中比例系数$A_r$是指相对于$\varepsilon_r$而言的，且设$A_r$和$\varepsilon_r$是相互独立的。

那么对类似于（8.22）式的无界的对数正态分布模式(8.25)式，此时间歇性指数为

$$\mu_{q,x} = \frac{\lambda}{2}qr_A\left(qr_A - 1\right) + \frac{\mu}{2}qr_\varepsilon\left(qr_\varepsilon - 1\right)$$

$$= \mu_{q1A} + \mu_{q1\varepsilon} \qquad (8.63)$$

（8.63）式表明，标量$X$的间歇性指数是$A$的间歇性指数和$\varepsilon$间歇性指数之和。

对于有界的对数正态模式，我们用

$$P_x = P_A P_\varepsilon \qquad (8.64)$$

对$P_A$，$P_\varepsilon$有同（8.22）式类似表达式，

和（8.58）式类似，有

$$\begin{aligned} \mu_{q,x} &= (d - D_{q,x})(q-1) \\ \mu_{q,\varepsilon} &= (d - D_{q,\varepsilon})(q-1) \\ \mu_{q,A} &= (d - D_{q,A})(q-1) \end{aligned} \qquad (8.65)$$

由（8.63）得出

$$D_{q,A} = D_{q,\varepsilon} - D_{q,x} \qquad (8.66)$$

（8.63）和（8.66）式的结果和§7分析的（8.59）和（8.55）式的结果一致。

对$A$和$\varepsilon$有类似的（8.27），（8.28）式的表达式，若取

$$\begin{aligned} &\alpha_{1,A} = 0.115,\ \alpha_{2,A} = 0.31,\ \mu_{2,A} = 0.07 \\ &\alpha_{1,\varepsilon} = 0.485,\ \alpha_{2,\varepsilon} = 0.74,\ \mu_{2,\varepsilon} = 0.25 \end{aligned} \qquad (8.67)$$

则作出的多分维$D_{q,\chi}$随$q$变化的曲线见图8.6中的曲线 1 。

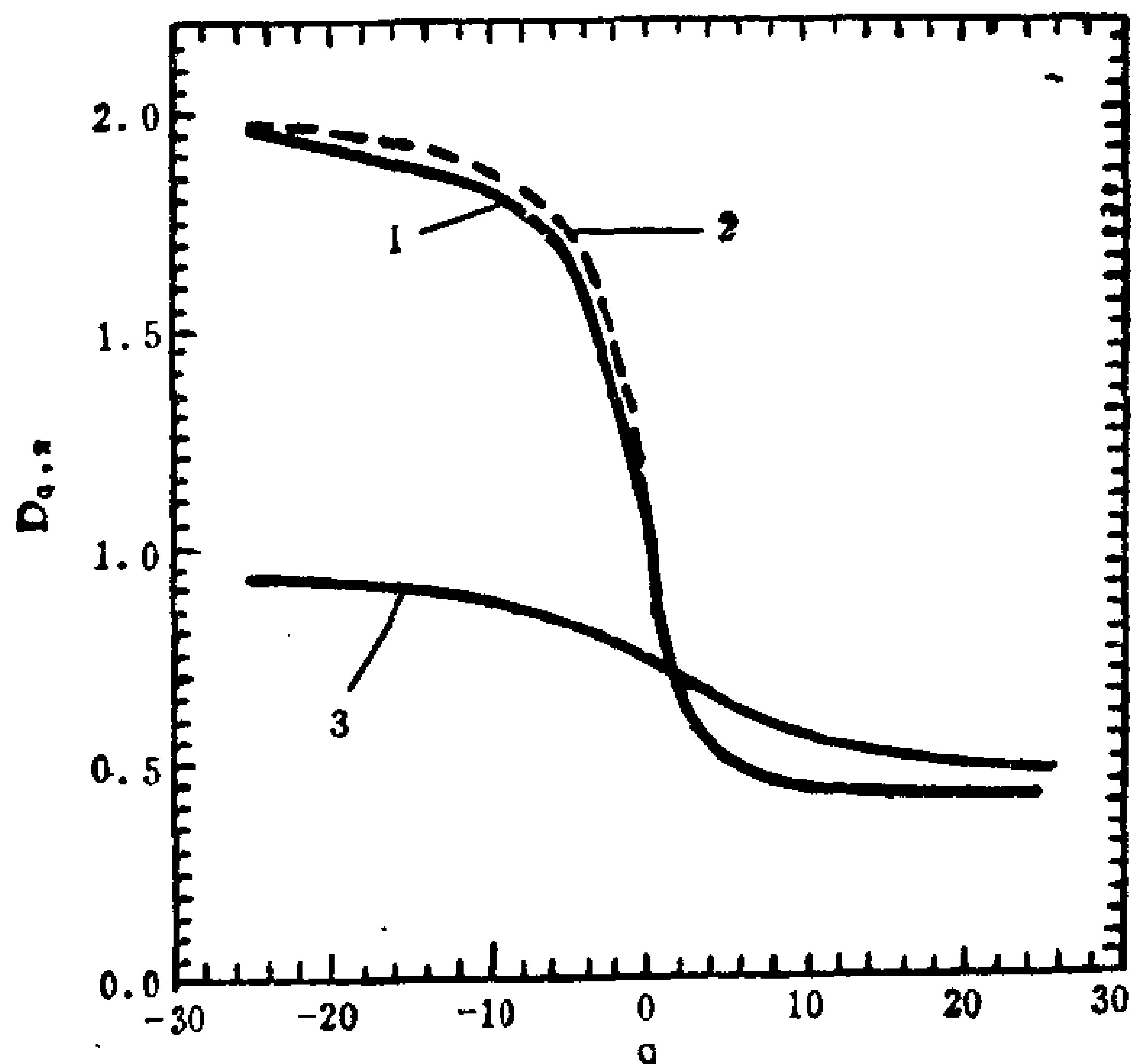



图8.6　标量$X$的多分维$D_{q,\chi}$

曲线 1 ：右界对数正态分布模式

曲线 2 ：两尺度Cantor集合模式

曲线 3 ：双随机$\beta$模式

和$\varepsilon$的两尺度Cantor集合模式（8.31）式类似，对$\chi$ 的两尺度Cantor集合模式为

$$D_{q,\chi}=\frac{1}{1-q}\log_2{}^{(0.76^q+0.24^q)} \tag{8.68}$$

由（8.68）作出的曲线见图8.6中的曲线 2 。

也有人建议用双随机$\beta$模式

$$\begin{aligned}\mu_{q,\chi} &= \mu_{q,A}+\mu_{q,\varepsilon} \\ &= \log_2(0.6\times 2^{-0.115(1-q)}+0.4) \\ &\quad +\log_2(0.47\times 2^{-0.485(1-q)}+0.53)\end{aligned} \tag{8.69}$$

由（8.69）式作出的$D_{q,\chi}$曲线见图8.6曲线 3 。

为了便于比较，图8.7（a）（b）分别是有界对数正态分布模式和双随机$\beta$模式的对$\varepsilon$和$X$曲线的比较。

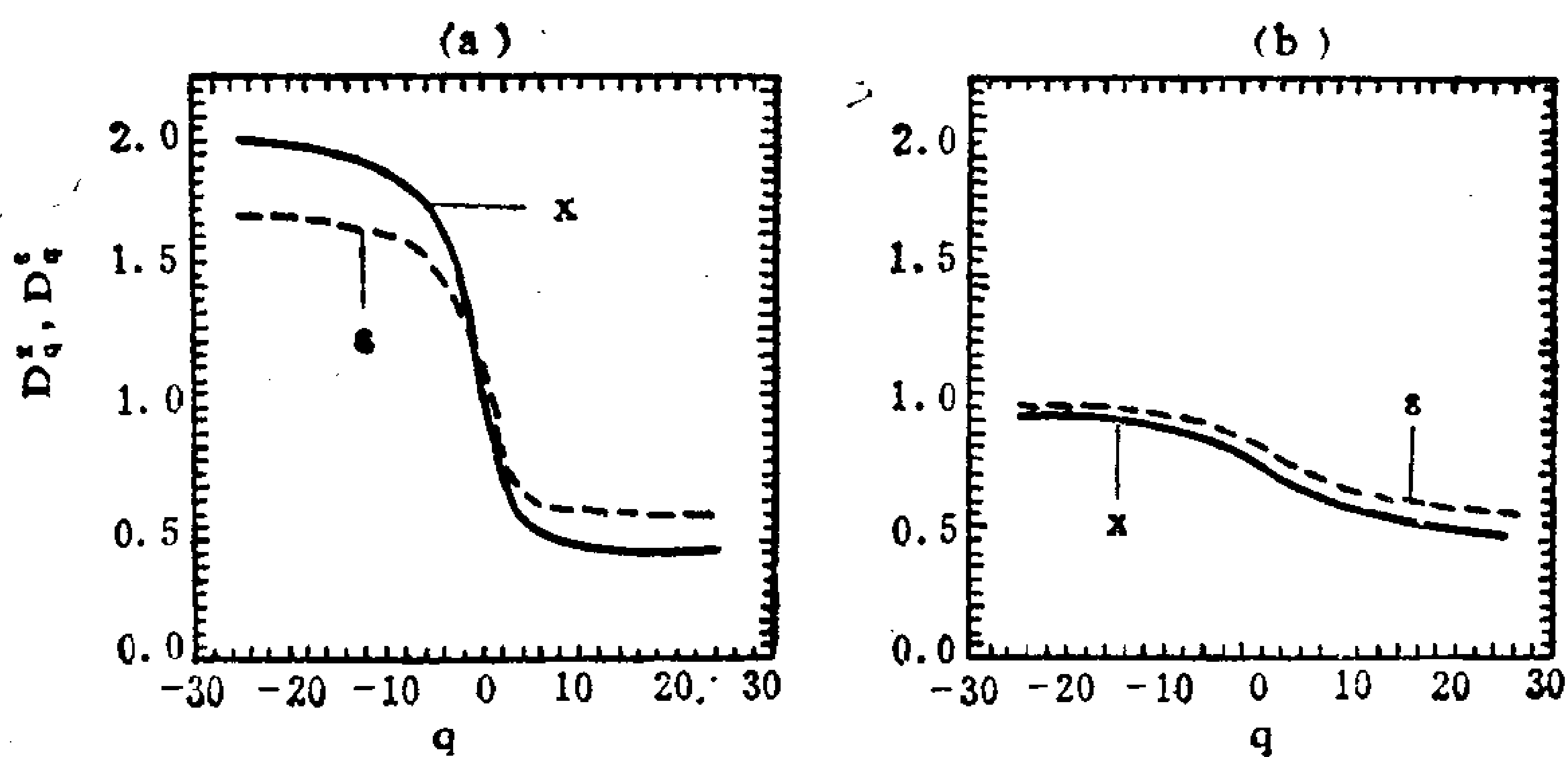



图8.7　$D_{q,x}$ 和$D_{q,\varepsilon}$ 曲线比较

(a) 有界对数正态模式

(b) 双随机$\beta$模式

从图8.7上看出，$q>0$时　$D_{q,\varepsilon}>D_{q,x}$。

图8.8列出了双随机$\beta$模式的对$\varepsilon$和对$X$的$f(\alpha)$曲线的比较。

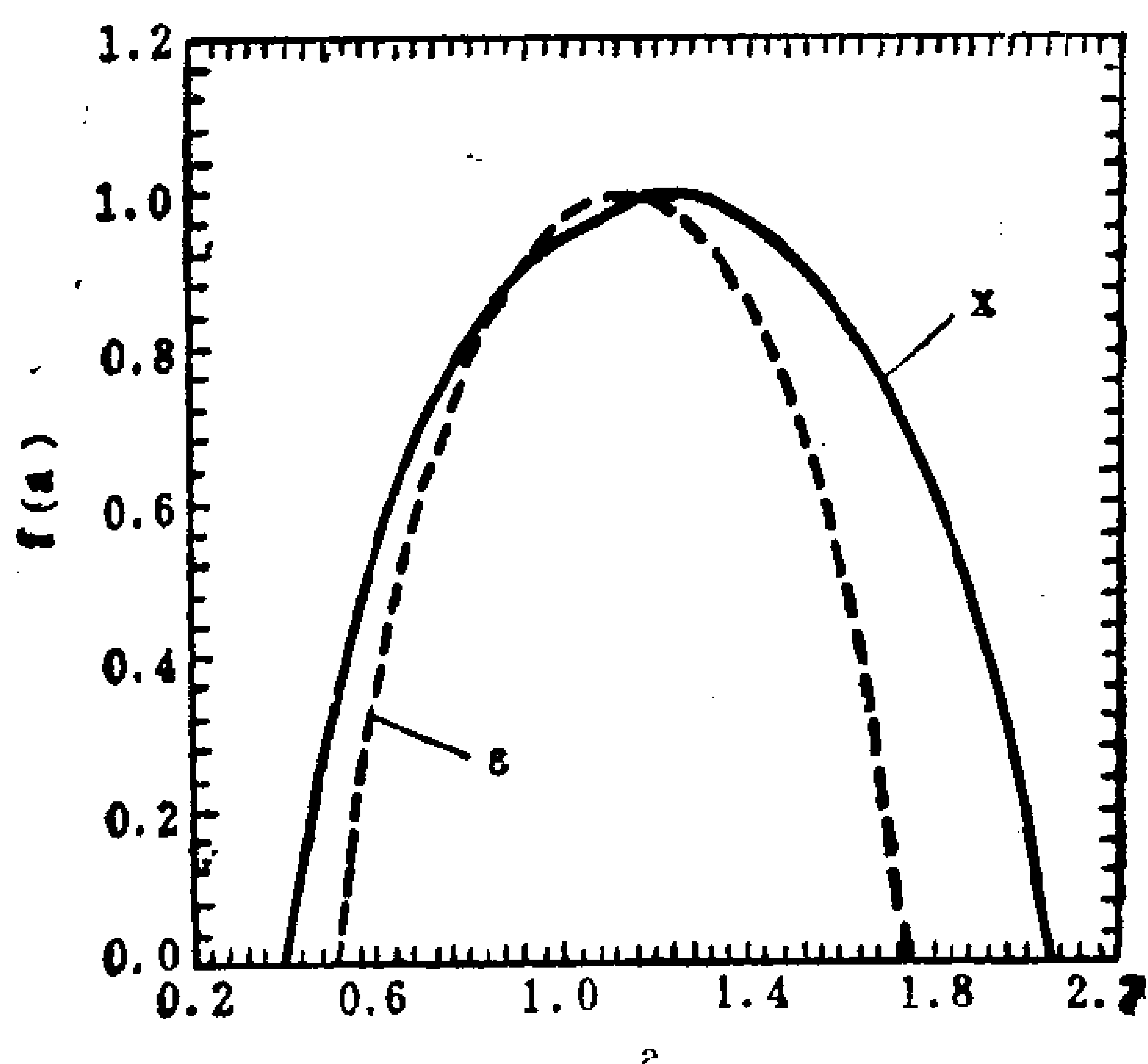



图8.8　对$e$和对$X$的$f(\alpha)$曲线比较

## 习　题

1. 表明Koch曲线的长度$L$和尺子长度$r$之间的关系为

$$L = r^{\mu} \qquad 其中\ \mu = 1 - \frac{\log 4}{\log 3} = 1 - D$$

2. 计算Koch 曲 线和原生成直线之间的面积，计算结果说明无穷长的Koch曲线却包围一个有限的面积。
3. 说明Sierpinski海绵的面积为零。
4. 把传统的Cantor 集合（等分三段，取掉中间一段）改为两段分别为 $\Delta\left(<\frac{1}{2}\right)$，取掉中间$1-2\Delta$ 的一段，说明其集合的长度为零。
5. 把传统的Cantor 集合改为去掉中间的$\frac{1}{2}$长度，说明该集合的维数 $D=\frac{1}{2}$。
6. 平面上传统的二维Cantor集合是由两个一维的 Cantor 集合相互垂直构成，试说明其维数是一维 Cantor 集 合的两倍，即

$$D = 2\frac{\log 2}{\log 3}$$

7. 一种“胖”的Cantor集合，第一步取掉中间的$\frac{1}{3}$，第二步取掉剩下的两段中每段的$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}$，类似第三步取掉剩下四段中每段的$\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{3}$，……。说明其测度不为零，而是$\frac{1}{3}$ 。
8. 说明二维Cantor集合的面积为零。
9. 在单位面积上去掉中间的一块$\left(面积为\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)$的 分形物体，说明其维数 $D=3\cdot\frac{\log 2}{\log 3}$ 。

10. 在单位正方面积上分成$l^2$个小方块，其中去掉 $m$ 个小方块($l \geqslant m+1$，$l$，$m$ 为整数)，然后对每个剩下的小方块$\left(\text{其面积为}\frac{1}{l^2}\right)$重复如上过程，证明该物体分形维数

$$D=\frac{\log(l^2-m^2)}{\log l}$$

11. 计算传统的Cantor集合的信息维 $D_1$（若每个阶段剩下的线段概率相等），并说明$D_1=D_0$。

12. 若 11 题中右边段的概率总是左边段概率的两倍，求其信息维。

13. 证明熵 $I=-\sum_{i=1}^{N}P_i\log P_i$在约束条件$\sum_{i=1}^{N}P_i=1$下在$P_i=\frac{1}{N}$时为最大。

14. 驱动单摆方程

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{1}{q}\frac{d\theta}{dt}+\sin\theta=g\cos\Omega t$$，将其化成

$$\begin{cases}\dfrac{d\omega}{dt}=-\dfrac{\omega}{q}-\sin\theta+g\cos\varphi\\[2ex]\dfrac{d\theta}{dt}=\omega\\[2ex]\dfrac{d\varphi}{dt}=\Omega\end{cases}$$

说明相空间的$\mathrm{div}\,\vec{v}=\frac{1}{q}$，若取$q=5$，$g=1.5$求出的三个Lyapunov特征指数为

$$LE_1=0.06,\quad LE_2=0,\quad LE_3=-0.26$$

请验证：$LE_1+LE_2+LE_3=\mathrm{div}\,\vec{v}$，并利用Yorke公式计算维数。

15. 用求相空间速度散度$\mathrm{div}\,\vec{v}$的方法判断下列动力系统是保守的还是耗散的？

（1） $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\theta=0$

（2） $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{d\theta}{dt}+\theta=0$

（3） $\ddot{x}=g$和 $\ddot{x}+k\dot{x}-g=0$

（4）

$$\begin{cases}\frac{dP_x}{dt}=-\frac{\partial V}{\partial x}\\ \frac{dP_y}{dt}=-\frac{\partial V}{\partial y}\\ \frac{dx}{dt}=P_x\\ \frac{dy}{dt}=P_y\end{cases}$$

位势$V=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+x^2y-\frac{1}{3}y^3$

（5）Lorenz系统

$$\begin{cases}\dot{x}=-\sigma x+\sigma y\\ \dot{y}=rx-y-xz\\ \dot{z}=xy-bz\end{cases}$$

16．说明下列各映射的解析解。

（1）

$$x_{n+1}=\begin{cases}2x_n, & 0\leqslant x_n<\frac{1}{2}\\ 2(1-x_n), & \frac{1}{2}\leqslant x_n\leqslant 1\end{cases}$$

解析解$x_n=\frac{1}{\pi}\cos^{-1}(\cos(2^n\pi x_0))$

（2）$x_{n+1}=x_n(3-4x_n^2)$ 解析解$x_n=\sin(3^n\sin^{-1}x_0)$

$-1\leqslant x_n\leqslant 1$

（3）

$$x_{n+1}=\begin{cases}2x_n & 0\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{2}\\ 2x_{n-1} & \frac{1}{2}<x_n<1\end{cases}$$

解析解$x_n=\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(\cot(2^n\pi x_0))$

(4) $x_{n+1}=16x_n(1-x_n)(1-2x_n)^2 \quad 0\leqslant x_n\leqslant 1$

解析解 $x_n=\sin^2(4^n\sin^{-1}\sqrt{x_0})$

(5) $x_{n+1}=x_n(5-20x_n^2+16x_n^4) \quad -1\leqslant x_n\leqslant 1$

解析解 $x_n=\sin(5^n\sin^{-1}x_0)$

(6)

$$x_{n+1}=\begin{cases} 4x_n & 0\leqslant x_n<\frac{1}{4} \\ 2(1-2x_n) & \frac{1}{4}\leqslant x_n<\frac{1}{2} \\ 2(2x_n-1) & \frac{1}{2}\leqslant x_n<\frac{3}{4} \\ 4(1-x_n) & \frac{3}{4}\leqslant x_n\leqslant 1 \end{cases}$$

解析解 $x_n=\frac{1}{\pi}\cos^{-1}(\cos(4^n\pi x_0))$

(7)

$$x_{n+1}=\begin{cases} 3x_n & 0\leqslant x_n<\frac{1}{3} \\ 2-3x_n & \frac{1}{3}\leqslant x_n<\frac{2}{3} \\ -2+3x_n & \frac{2}{3}\leqslant x_n\leqslant 1 \end{cases}$$

解析解 $x_n=\frac{1}{\pi}\cos^{-1}(\cos(3^n\pi x_0))$

(8) $x_{n+1}=16x_n(1-2\sqrt{x_n}+x_n) \quad 0\leqslant x_n\leqslant 1$

解析解 $x_n=\sin^4(2^n\sin^{-1}x_0^{\frac{1}{4}})$

(9) $x_{n+1}=\sqrt{2}\,x_n(1-x_n^4)^{\frac{1}{4}} \quad 0\leqslant x_n\leqslant 1$

解析解 $x_n=(\sin(2^n\sin^{-1}x_0^2))^{\frac{1}{2}}$

(10) $x_{n+1}=16x_n^3-24x_n^2+9x_n \quad 0\leqslant x_n\leqslant 1$

解析解 $x_n = \frac{1}{2}[1 + \sin(1 - 3^n \sin^{-1}(2x_0 - 1))]$

(11) $x_{n+1} = (2x_n^{\frac{2}{3}} - 1)^3 \quad -1 \leqslant x_n \leqslant 1$

解析解 $x_n = \cos^3(2^n \cos^{-1}(x_0^{1/3}))$

(12) $x_{n+1} = (2x_n^6 - 1)^{\frac{1}{3}} \quad -1 \leqslant x_n \leqslant 1$

解析解 $x_n = (\cos(2^n \cos^{-1} x_0^3))^{\frac{1}{3}}$

## 参 考 书 目


[1] Mandelbrot, B.B, The Fractal Geometry of Nature Freemann, 1982.

[2] Schuster, H.G, Deterministic Chaos—An intrduction weinheim, 1984.

[3] Peitgen, H.O, The Beauty of Fractals, Springer, 1986.

[4] Feder, J, Fractals, New York, 1988.

[5] Peitgen, H.O, The Science of Fractal Images, New York 1988.

[6] Stewart, I., Does God Play Dice? The Mathemetics of chaos, Oxford, 1989.

[7] Gleick, J., chaos: Making a New Science, Viking, 1987.

[8] Sagdeev.R.Z., Nonlinear physics: from the pendulum to turbulence and chaos, Harwood, 1988.

[9] Seydel, R., From Equilibrium to chaos, Elsevier, 1988.

[10] Jackson, E.A., Perspectives of Nonlinear Dynamics Cambridge University, 1989.

[11] 高安秀树，分数维（中译本），地震出版社，1989。

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝分形和分维引论
作者＝刘式达　　刘式适编著
页数＝１７５
ＳＳ号＝１０６５８１０５
出版日期＝１９９３年０９月第１版

**附录页**